

LNF - 64/1  
16 Gennaio 1964

L. Mango: EFFETTO DEGLI ERRORI NEGLI ELEMENTI DELLA STRUTTURA MAGNETICA DI UNA MACCHINA ACCELERATRICE A FUNZIONI SEPARATE. -

(Nota interna : n. 231)

Nota interna: n° 231  
16 Gennaio 1964

L. Mango: EFFETTO DEGLI ERRORI NEGLI ELEMENTI DELLA STRUTTURA MAGNETICA DI UNA MACCHINA ACCELERATRICE A FUNZIONI SEPARATE.

Parte I - ERRORI CASUALI	
1. Introduzione	pag. 2
2. Errori di gradiente e di indice di campo	6
3. Effetti sull'orbita chiusa dei disallineamenti radiali e verticali.	10
4. Disallineamenti azimutali ed errori sulle lunghezze	15
Parte II - ERRORI SISTEMATICI	
1. Errori sistematici	23
2. Errori sull'indice di campo n	23
3. Disallineamenti sistematici	24
4. Errori sistematici sulle lunghezze	28
Parte III- EFFETTI NON LINEARI	
1. Le risonanze nella traiettoria lineare	31
2. La risonanza del 3° ordine nel caso non lineare	32
3. Calcolo degli integrali E e F	37
4. Appendice	39
Parte IV - ALCUNI ESEMPI NUMERICI	
1. Errori casuali	40
2. Errori sistematici	41
3. Effetti non lineari	43

## PARTE I - ERRORI CASUALI.

## 1. INTRODUZIONE.

In questo capitolo introduttivo vogliamo riassumere alcuni concetti e procedimenti della teoria lineare delle macchine acceleratrici a gradiente alternato, per mettere in evidenza in quale modo si debbono impostare i calcoli per una macchina reale imperfetta.

I punti fondamentali per lo studio di una macchina sono:

- a) definizione e calcolo delle orbite chiuse, e in particolare di un'orbita chiusa principale, che viene scelta come sistema di riferimento per il moto delle particelle;
- b) calcolo dei parametri (ampiezze, involuppo, frequenze) che definiscono le oscillazioni di betatrone radiali e verticali;
- c) analisi della stabilità per i moti di betatrone.

In teoria lineare di una macchina ideale sono supposti perfettamente noti i parametri dei magneti e delle lenti quadrupolari, e generalmente si definiscono una periodicità e, di conseguenza, la struttura di una "maglia" periodica, costituita da un insieme di magneti e di lenti, le cui caratteristiche geometriche e magnetiche si ripetono esattamente in tutte le altre maglie.

La definizione della geometria e delle caratteristiche magnetiche permette di calcolare una famiglia di  $\infty^1$  traiettorie periodiche su un giro di macchina, dette orbite chiuse, il cui parametro è l'energia, e tra esse si sceglie come orbita principale, da usare nel seguito come curva di riferimento, quella più conveniente dal punto di vista geometrico, cioè l'orbita che meno si discosta dall'asse della ciambella  $o$ , in alcune geometrie, che coincide con esso. Questa orbita è caratterizzata da una energia  $E_0$ , e può essere resa sincrona scegliendo un valore opportuno per la frequenza della RF, in modo cioè che la particella ipotetica di energia  $E_0$  abbia un periodo di rivoluzione uguale al periodo della RF o ad un suo sottomultiplo.

Le altre orbite della famiglia saranno quindi caratterizzate dalla variazione di energie rispetto all'energia sincrona.

Una particella di energia  $E$  che si trovi in un punto della macchina con condizioni iniziali di posizione e angolo non coincidenti con quelle dell'orbita che compete alla sua energia, esegue, intorno a quest'ultima, un moto che per

alcuni valori dei parametri della macchina è di tipo oscillante, per altri di tipo iperbolico. Una macchina viene progettata in modo che i due moti di betatrone, radiale e verticale, e quello di sincrotrone risultino stabili. La condizione di stabilità dei moti di betatrone viene espressa imponendo che le tracce delle matrici radiale e verticale di un periodo di macchina siano in modulo  $< 2$ . Questa condizione permette di definire per ciascun moto di betatrone una matrice di trasferimento la cui potenza  $N$ esima ha elementi limitati.

Nel caso ideale di una struttura perfettamente periodica e con i parametri magnetici costanti e uguali ai valori progettati, la condizione  $|T_r| < 2$  sarebbe sufficiente ad assicurare il funzionamento regolare della macchina. In una macchina reale esistono sempre numerose imperfezioni o errori, sia di tipo sistematico, tali cioè da conservare la periodicità della struttura - sia di tipo casuale, e hanno tutti l'effetto di alterare in modo più o meno intenso le caratteristiche delle orbite chiuse e delle oscillazioni di betatrone: in particolare si possono ottenere orbite chiuse variate, le cui ampiezze, in caso di risonanza, tendono all'infinito, oppure i valori delle frequenze di betatrone possono venire modificati e cadere in zone in cui le oscillazioni di betatrone risultano risonanti, o instabili, o accoppiate.

I vari tipi di errori che si possono riscontrare in una macchina acceleratrice si possono riunire in gruppi di errori, fisicamente diversi, che danno luogo a effetti equivalenti.

L'equivalenza di errori diversi verrà accennata di volta in volta nei paragrafi seguenti, nei quali ci limiteremo a valutare, - per quanto possibile, in modo analitico, gli effetti di alcuni tipi fondamentali di errori, e precisamente:

- A) errori di campo e di gradiente,
- B) errori di posizionamento geometrico (traslazioni),
- C) presenza di termini non lineari negli sviluppi in serie dei campi e dei gradienti;

prendendo in considerazione i seguenti effetti:

- a) formazione di bande di instabilità e loro larghezza;
- b) spostamenti dell'orbita chiusa principale;

Esamineremo ciascun tipo di errore indipendentemente dagli altri e faremo l'ipotesi che i vari effetti si sovrappongano linearmente, il che è corretto in prima approssimazione.

Per quanto riguarda gli errori casuali, calcoleremo gli effetti di ciascun tipo di errore sulle grandezze caratteristiche della macchina usando un metodo perturbativo al 1° ordine: supponendo cioè che il parametro  $X$  affetto da errore assuma nel punto  $i$  esimo della macchina il valore

$X_i = X_0 + \Delta_i$ , che gli errori  $\Delta_i$  siano piccoli e distribuiti casualmente lungo la macchina, con valore medio nullo (\*) e valore quadratico medio  $\langle \Delta^2 \rangle^{1/2}$ , e che sia lecito trascurare i quadrati  $(\Delta/x_0)^2$  rispetto a 1.

Alcune grandezze caratteristiche della macchina reale sono del tipo

$$A = \sum a_i X_i = A_0 + \sum a_i \Delta_i$$

essendo  $A_0$  il valore imperturbato.

Il valore medio di  $A$  è uguale ad  $A_0$ , in quanto i valori medi delle  $\Delta_i$  sono nulli.

Ci interessa la relazione tra lo scarto quadratico medio di  $A$  dal valore  $A_0$  e il valore quadratico medio  $\langle \Delta^2 \rangle^{1/2}$  dell'errore sul parametro  $X$ . Imponendo che  $A_0 \pm \langle \Delta A^2 \rangle^{1/2}$  non superi limiti di volta in volta prefissati si potrà ricavare il massimo  $\langle \Delta^2 \rangle^{1/2}$  consentito. Un risultato più generale è il "rapporto di amplificazione"  $(\langle \Delta^2 \rangle^{1/2}) / (\langle \Delta A^2 \rangle^{1/2})$ , espresso in formule che dipendono dai parametri geometrici e magnetici della macchina, e che quindi permettono la valutazione numerica delle tolleranze non solo per l'anello di accumulazione in costruzione nei L.N. di F., ma anche per altre macchine a foccheggiamento forte. Per valutare  $\langle \Delta A^2 \rangle$  useremo il seguente procedimento: consideriamo un insieme  $E$  costituito da un numero molto grande di macchine simili. Stabiliamo un'origine sull'ascissa curvilinea di ciascuna e quindi definiamo gli insiemi  $I$  di elementi corrispondenti.

Lungo ciascun insieme  $I$  la grandezza  $X$  varia con distribuzione gaussiana di valore medio  $X_0$  e larghezza quadratica media  $\langle \Delta^2 \rangle^{1/2}$ . Lungo una qualsiasi macchina dell'insieme la grandezza  $X$  varia con la stessa legge, di modo che gli errori  $\Delta_i$  e  $\Delta_j$  di due punti distinti della stessa macchina risultano incorrelati.

Lo scarto  $A - A_0$  vale

$$\Delta A = \sum_{i=1}^N a_i \Delta_i$$

Il valore quadratico medio si ottiene quadrando e successivamente mediando sull'insieme  $E$ , ovvero per ciascun termine su un insieme  $I$ .

Per le ipotesi dette si ha:

---

(\*) - Se il valore medio è diverso da zero si ha una sovrapposizione di errori sistematici ed errori casuali.

$$\begin{aligned} \langle (\Delta A)^2 \rangle &= \langle \sum_i \sum_j a_i a_j \Delta_i \Delta_j \rangle = \sum_i \sum_j a_i a_j \langle \Delta_i \Delta_j \rangle = \\ &= \sum_i \sum_j a_i a_j \langle \Delta^2 \rangle \delta_{ij} = \langle \Delta^2 \rangle \sum_j a_j^2 \end{aligned}$$

Pertanto

$$\langle \Delta A^2 \rangle^{1/2} = \langle \Delta^2 \rangle^{1/2} \left[ \sum_j a_j^2 \right]^{1/2}$$

e se le  $a_i$  sono tutte uguali:

$$\langle \Delta A^2 \rangle^{1/2} = \langle \Delta^2 \rangle^{1/2} |a| \sqrt{N}$$

Un'altra grandezza interessante è una matrice  $\underline{B}$  data da:

$$\underline{B} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \underline{Y}_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\underline{Y}_0 + \bar{\underline{Y}}_i)$$

dove le  $\underline{Y}_0$ ,  $\underline{Y}_i$ ,  $\bar{\underline{Y}}_i$  sono matrici, e le  $\underline{Y}_i$  hanno elementi proporzionali agli errori  $\Delta_i$  della grandezza  $X$  che varia in modo casuale lungo la macchina.

Ponendo  $\underline{B}_0 = \underline{Y}_0^N$  si ottiene

$$\underline{B} - \underline{B}_0 = \sum_{k=0}^{N-1} \underline{Y}_0^k \bar{\underline{Y}}_{k+1} \underline{Y}_0^{N-k-1} + \text{termini che contengono}$$

almeno due matrici  $\bar{\underline{Y}}$ , e che pertanto hanno elementi di ordine  $\geq 2$  nella perturbazione. Normalmente trascureremo questi termini, ottenendo gli elementi di  $\underline{B} - \underline{B}_0$  al 1° ordine come combinazioni lineari degli errori  $\Delta_i$ , e il loro valore quadratico medio si calcolerà come descritto più sopra.

Nella maggior parte dei casi la grandezza che interessa, scalare o matrice,  $A$ , dipende da due o più distinte grandezze  $X, Y, Z, \dots$ : si può allora determinare il valore del quadrato dell'errore q.m. su  $A$  come una combinazione lineare

$$\langle \Delta A^2 \rangle = C_1 \langle \Delta X^2 \rangle + C_2 \langle \Delta Y^2 \rangle + C_3 \langle \Delta Z^2 \rangle + \dots$$

Non ha più significato parlare di fattore di amplificazione, perchè sarebbe necessario fare ipotesi sul peso relativo degli errori dei diversi tipi; daremo quindi come risultato i valori di  $\langle \Delta X^2 \rangle^{1/2}$ ,  $\langle \Delta Y^2 \rangle^{1/2}$ ,  $\langle \Delta Z^2 \rangle^{1/2}$  che danno luogo a  $\langle \Delta A^2 \rangle = 1$  (nelle unità richieste) con contributi uguali (egual peso).

Cioè se  $A$  dipende da  $N$  grandezze, daremo le quantità:

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{C_1}} ; \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{C_2}} ; \dots \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{C_N}} ,$$

che definiscono completamente il problema.

Nell'impostazione dei vari problemi sono state seguite in parte le trattazioni classiche di Conrath<sup>(1)</sup> e di Sturrock<sup>(2)</sup>, e ne sono stati adottati simboli e terminologia.

In appendice riportiamo alcuni esempi numerici calcolati per l'anello di accumulazione "Adone" di Frascati, per  $e^+$  ed  $e^-$  da 1500 MeV.

## 2. ERRORI DI GRADIENTE E DI INDICE DI CAMPO.

Consideriamo l'equazione del moto di betatrone

$$y'' + K(s)y = 0$$

$K(s)$  vale  $+(G/\beta S)$  nei quadrupoli, zero nelle sezioni prive di campo,  $[(1-n)/S^2]$  o  $(n/\rho^2)$  nei magneti curvanti.

La matrice di un giro di macchina ha elementi funzioni di  $K(s)$ , e quindi anche la frequenza di betatrone, direttamente legata alla traccia della matrice, risulta funzione di  $K(s)$ .

Se il parametro  $K$  è affetto da errori casuali lungo la macchina, anche la matrice di un giro sarà diversa da quella del caso perfetto, e in particolare sarà variata la frequenza di betatrone  $\nu_0$  di una quantità  $\Delta\nu$ , della quale vogliamo calcolare il valore quadratico medio.

Se  $\nu_0$  è vicino a un numero intero o semintero, cioè ai valori che rendono instabili i moti di betatrone e per i quali, come vedremo più avanti, anche le orbite chiuse presentano risonanze, per es.

$$\nu_0 = \begin{cases} p \pm \varepsilon \\ p + \frac{1}{2} \pm \varepsilon \end{cases}$$

con  $p$  intero e  $\varepsilon$  piccolo, sono sufficienti errori di gradiente che producono un errore quadratico medio sulla frequenza dell'ordine di  $\varepsilon$  perchè la macchina diventi instabile. La macchina quindi sarà instabile per tutti i valori della frequenza contenuti in ben determinati intervalli, stopband, intorno alle frequenze intere e semintere. Vogliamo calcolare, in funzione degli errori quadratici medi dei gradienti e degli indici di campo, sia il valore quadratico medio della larghezza in frequenza delle stopband prodotte, sia il valore quadratico medio della variazione della frequenza di lavoro della macchina reale rispetto alla frequenza calcolata per la macchina perfetta. Quanto segue è valido per entrambi i moti di betatrone.

Riassumiamo brevemente il procedimento ormai classico per valutare la variazione di frequenza. Sia  $K(s_1)$  l'errore di  $K(s)$  nel punto  $s_1$ .

Il tratto di macchina di lunghezza infinitesima tra  $s_1$  e  $s_1 + ds_1$  è rappresentato, per  $\sqrt{K} ds \ll 1$  dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & ds_1 \\ -[k(s_1) + k(s_1)] ds_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Poichè la traccia di una matrice di un giro di macchina è indipendente dal punto  $s$  in cui si calcola la matrice, possiamo calcolare nel punto  $s_1$  la traccia della matrice variata.

Sia  $M_0(s_1)$  la matrice imperturbata.

La matrice perturbata si ottiene sostituendo al tratto  $ds_1$  con parametro  $K(s_1)$  il tratto  $ds_1$  con parametro  $K(s_1) + k(s_1)$ , ovvero:

$$\begin{aligned} M'(s_1) &= \begin{pmatrix} 1 & ds_1 \\ -(k+k) ds_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & ds_1 \\ -k ds_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} M_0(s_1) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k(s_1) ds_1 & 1 \end{pmatrix} M_0(s_1) = M_0(s_1) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -k(s_1) ds_1, m_{11}^{(0)} & -k(s_1) ds_1, m_{12}^{(0)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pertanto si ha:

$$\text{Tr } M' - \text{Tr } M_0 = -k(s_1) ds_1, m_{12}^{(0)} = -k(s_1) \beta(s_1) \sin \mu_0 ds_1.$$

Consideriamo anche un errore  $K(s_2)$  nel punto  $s_2$ . La matrice variata è data, con ovvie notazioni, da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k(s_1) ds_1 & 1 \end{pmatrix} M_0(s_1, s_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k(s_2) ds_2 & 1 \end{pmatrix} M_0(s_2, s_1)$$

Sviluppando il prodotto e calcolando la variazione della traccia si ottiene, poichè  $\text{Tr } M_0 = 2 \cos \mu_0$  (\*):

$$2 \cos \mu - 2 \cos \mu_0 = -(k(s_1) ds_1, \beta(s_1) + k(s_2) ds_2, \beta(s_2)) \sin \mu_0 +$$

+ termine nel prodotto  $K(s_1) K(s_2)$ .

(\*) - In questo capitolo con  $\mu$  indichiamo l'angolo di betatrone per un giro di macchina anzichè per un sottoperiodo.



8.

Al 1° ordine l'effetto degli errori di gradiente è additivo, e la variazione di frequenza risulta complessivamente:

$$(1) \quad \Delta \nu^{(1)} = - \frac{\Delta(\omega \mu)}{2\pi \sin \mu_0} = \frac{1}{4\pi} \int \beta(s) k(s) ds$$

L'approssimazione del 1° ordine è valida se  $\sin \mu_0$  è lontanola zero, quindi la (1) rappresenta la variazione di frequenza per una macchina reale, quando la frequenza della macchina ideale corrispondente è lontana dalle risonanze. In caso contrario  $\sin \mu_0$  è molto piccolo, e dobbiamo tenere conto anche dei termini del secondo ordine, non più trascurabili, e otteniamo<sup>(1)</sup>

$$(2) \quad \cos \mu - \cos \mu_0 = - \frac{\sin \mu_0}{2} \int_0^c k(s) \beta(s) ds + \frac{1}{2} \int_0^c ds_1 \int_0^c ds_2 k(s_1) k(s_2) \beta(s_1) \cdot \beta(s_2) \sin \nu (\phi(s_2) - \phi(s_1)) \sin [\mu_0 - \nu (\phi(s_2) - \phi(s_1))]$$

dove

$$\phi(s) = \int_0^s \frac{ds'}{\nu \beta(s')}$$

Vicino alla risonanza (per es.  $\nu_0 = p + \varepsilon$  con  $\varepsilon \ll 1$ ), si può porre  $\sin \mu_0 \sim 2\pi\varepsilon$ ,  $\cos \mu_0 \sim 1 - 2\pi^2\varepsilon^2$ , e si possono trascurare i termini di ordine  $> 2$  in  $\varepsilon$ ,  $k$  e in  $\varepsilon$  e  $k$  combinati.

Si può allora riscrivere la (2) nella forma

$$\omega \mu - 1 = -2\pi\varepsilon^2 - \pi\varepsilon^2 J_0 + \frac{1}{8} (|J_{2p}|^2 - J_0^2)$$

dove

$$J_n = \int_0^c \beta(s) k(s) e^{in\phi(s)} ds$$

I due valori di  $\varepsilon$  per i quali  $\cos \mu = 1$ , cioè i due punti estremi della stopband, sono dati da

$$\varepsilon = - \frac{J_0 \pm |J_{2p}|}{4\pi}$$

Quindi la larghezza della stopband è data da

$$(3) \quad \delta \nu = \frac{|J_{2p}|}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^c \beta(s) k(s) e^{2ip\phi(s)} ds \right|$$

La stopband per  $\nu$  vicino a un numero semintero ( $\nu = p + \frac{1}{2} + \varepsilon$ ),

ha una larghezza data dalla (3) con la sostituzione  $p + \frac{1}{2}$  al posto di  $p$ . La posizione del centro della stopband è

$$-\frac{J_0}{4\pi} = -\Delta\nu^{(1)},$$

Calcoliamo esplicitamente i valori quadratici medi di  $\delta\nu$  e  $\Delta\nu^{(1)}$  per una macchina in cui l'errore  $k(s)$  sia costante in ciascun elemento e vari casualmente da elemento a elemento.

Supponiamo anche che  $\beta(s)$  si possa ritenere costante sulla lunghezza di un elemento. Sia  $N$  il numero totale di elementi con  $K \neq 0$ . La (3) diventa:

$$(3') \quad (\delta\nu)^2 = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \left[ \int \beta(s) k(s) \cos 2p\phi(s) ds \right]^2 + \left[ \int \beta(s) k(s) \sin 2p\phi(s) ds \right]^2 \right\}$$

Usando la variabile  $2p\phi$  si ha:

$$\begin{aligned} (\delta\nu)^2 &= \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \left[ \int_0^{4\pi p} \beta^2 \nu k \cos x dx \right]^2 + \left[ \int_0^{4\pi p} \beta^2 \nu k \sin x dx \right]^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{(4\pi p)^2} \left\{ \left[ \nu \sum_{j=1}^N \bar{\beta}_j^2 k_j \sin(2\nu \Delta\phi_j) \right]^2 + \left[ \nu \sum_{j=1}^N \bar{\beta}_j^2 k_j \cos(2\nu \Delta\phi_j) \right]^2 \right\} = \\ &= \left( \frac{\nu}{4\pi p} \right)^2 \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N k_i k_j \bar{\beta}_i^2 \bar{\beta}_j^2 \sin(2\nu \Delta\phi_j) \sin(2\nu \Delta\phi_i) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N k_i k_j \bar{\beta}_i^2 \bar{\beta}_j^2 \cos(2\nu \Delta\phi_j) \cos(2\nu \Delta\phi_i) \right\} \end{aligned}$$

Calcolando il valore medio su un insieme di macchine si ottiene:

$$(4) \quad \langle \delta\nu^2 \rangle = \left( \frac{\nu}{4\pi p} \right)^2 \sum_{j=1}^N \bar{\beta}_j^4 \langle k_j^2 \rangle$$

Con lo stesso procedimento si ottiene dalla (1), indicando con  $l_j$  la lunghezza dell'elemento  $j$  esimo:

$$(5) \quad \langle (\Delta\nu^{(1)})^2 \rangle = \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{j=1}^N \bar{\beta}_j^2 \langle k_j^2 \rangle l_j^2$$

Poichè  $\beta$  è di solito  $> 1$ , la larghezza della stopband è molto maggiore di  $\langle (\Delta\nu^{(1)})^2 \rangle^{1/2}$ , che indica la posizione del centro della stopband. Possiamo quindi ritenere in pratica che la stopband si estenda da  $\nu = p - \langle \delta\nu^2 \rangle^{1/2}$  a  $\nu = p + \langle \delta\nu^2 \rangle^{1/2}$ ,

10.

e calcolare le tolleranze sui gradienti imponendo un limite a  $\langle \delta v^2 \rangle^{1/2}$ , che è l'effetto predominante.

### 3. EFFETTI SULL'ORBITA CHIUSA DEI DISALLINEAMENTI RADIALI E VERTICALI.

L'equazione generale del moto di betatrone radiale per una particella di energia generica è data da:

$$(6) \quad x'' + k(s)x = -\frac{1}{s} \frac{\Delta p}{p}$$

dove  $(\Delta p/p)$  rappresenta la variazione percentuale dell'energia della particella rispetto all'energia sincrona,  $Q(s)$  è il raggio di curvatura dell'orbita sincrona, diverso da zero solo nei magneti curvanti: negli altri elementi (sezioni dritte e quadrupoli) il termine a secondo membro è uguale a zero. Il moto si intende riferito all'orbita sincrona.

Data la linearità della (6), possiamo scriverne la soluzione generale come combinazione lineare della soluzione generale dell'equazione omogenea e di una soluzione particolare, periodica, continua e derivabile con derivata continua, della equazione non omogenea. La soluzione della  $x'' + Kx = 0$  rappresenta il moto radiale di betatrone intorno all'orbita chiusa principale, mentre la soluzione particolare della (6) può essere considerata nuovo sistema di riferimento. In questo modo formale si definiscono le orbite chiuse variate. Una qualsiasi perturbazione periodica sul giro di macchina che introduca un termine non omogeneo nell'equazione del moto di betatrone (eventualmente diverso da zero nei quadrupoli) dà un effetto che si può descrivere semplicemente come un cambiamento dell'orbita chiusa di riferimento. Una perturbazione di questo tipo è per esempio un errore del campo  $B$  dei magneti: infatti, dalla relazione  $B\gamma \propto p$  valida nei magneti, segue  $(\Delta p/p) = (\Delta B/B)$ , e si può interpretare l'equazione (6) sia come equazione del moto di una particella non sincrona, sia come il moto di una particella di energia  $E_s$  in un settore di macchina in cui il campo  $B$  sia variato di una quantità percentuale  $(\Delta B/B) = (\Delta p/p)$ .

Su un arco di orbita principale in un magnete, un errore sul campo magnetico  $B$  può essere costante o variabile con l'ascissa curvilinea. Qui considereremo solo il caso di variazione costante in un magnete, diversa però da magnete a magnete.

Questo caso comprende un gran numero di tipi di errori, tra i quali la variazione casuale della permeabilità magnetica media da magnete a magnete, la variazione casuale dell'altezza verticale del traferro, il disallineamento meccanico radiale dei magneti.

Nel caso di un disallineamento  $\Delta x$  si ha

$$(6') \quad \frac{\Delta B}{B_0} = \Delta x \frac{\text{grad } B}{B_0}$$

Con un termine di questa forma si possono però rappresentare non solo i disallineamenti dei magneti curvanti, ma anche quelli dei quadrupoli, ove si prenda per  $B_0$  il valore della rigidità magnetica della particella e si introduca il termine (6') nell'equazione del moto nei quadrupoli. Per il moto di betatrone verticale l'equazione generale è:

$$z'' + K(s) z = 0,$$

cioè si ha una sola orbita chiusa  $z = 0$ , indipendentemente dall'energia. La presenza di termini non omogenei può essere introdotta per tenere conto di errori (per es. disallineamento verticale o variazione della componente radiale del campo guida), il cui effetto può essere descritto formalmente anche in questo caso come uno spostamento dell'orbita chiusa verticale.

Consideriamo pertanto l'equazione di un moto di betatrone con un termine non omogeneo  $F(s)$  periodico sul giro di macchina:

$$(7) \quad y'' + K(s) y = F(s),$$

e cerchiamone la soluzione particolare periodica, in termini della soluzione dell'equazione omogenea  $y(s) = \sqrt{\beta(s)} \cos(\nu \phi(s) + \sigma)$  che supponiamo nota.

Seguendo le notazioni di Courant poniamo

$$(8) \quad \eta = \beta^{-1/2} y \quad \phi = \int \frac{ds}{\sqrt{\beta}}$$

Con le trasformazioni inverse delle (8) si riscrive la (7) per la funzione  $\eta(\phi)$  ottenendo l'equazione dell'oscillatore forzato:

$$(9) \quad \frac{d^2 \eta}{d\phi^2} + \nu^2 \eta = \nu^2 f(\phi)$$

con

$$f(\phi) = \beta^{3/2}(s) F(s)$$

La soluzione periodica della (9) è:

$$(9') \quad \eta(\phi) = \frac{\nu}{2 \sin \pi \nu} \int_{\phi}^{\phi+2\pi} f(\eta) \cos \nu(\pi + \phi - \eta) d\eta$$

12.

Per la soluzione generica dell'equazione (7), e quindi anche per la soluzione particolare  $\bar{y}(s) = \beta^2 \eta(\phi)$  si può definire un invariante di fase W:

$$W(s) = \gamma(s) \bar{y}(s)^2 + 2\alpha(s) \bar{y}(s) \bar{y}'(s) + \beta(s) \bar{y}'(s)^2$$

che è legato all'ampiezza massima  $\bar{y}_{\max}(s)$  nel punto s dalla relazione:

$$\bar{y}_{\max}(s) = \sqrt{\beta(s) W(s)}$$

Notiamo che il valore numerico è indipendente da s, quindi la massima ampiezza si avrà nel punto di macchina in cui  $\beta$  è massimo:

$$\bar{y}_{\max \max} = \sqrt{W / \beta_{\max}}$$

Passando attraverso le (8) alle nuove variabili, si vede che lo stesso invariante nelle nuove variabili è dato da:

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \eta^2(\phi) + \left( \frac{\eta'(\phi)}{\nu} \right)^2 = \\ (10) \quad &= \frac{\nu^2}{4 \sin^2 \pi \nu} \int_{\phi}^{\phi+2\pi} d\psi \int_{\phi}^{\phi+2\pi} d\chi f(\psi) f(\chi) \cos \nu(\psi - \chi) \end{aligned}$$

Anche in  $V(\phi)$  la differenza da  $\phi$  è fittizia dato che  $f(\phi)$  è una funzione periodica in  $\phi$ .

Possiamo quindi porre:

$$\bar{y}_{\max \max}^2 = \beta_{\max} V(\phi).$$

Calcoliamo esplicitamente la (10), supponendo  $\beta$  e  $F(s)$  costanti, cioè  $f(\phi)$  costante, in ciascun elemento:

$$\begin{aligned} (10') \quad V(\phi) &= \frac{\nu^2}{4 \sin^2 \pi \nu} \left\{ \int_{\phi}^{\phi+2\pi} d\chi f(\chi) \cos \nu \chi \int_{\phi}^{\phi+2\pi} d\psi f(\psi) \cos \nu \psi + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\phi}^{\phi+2\pi} d\chi f(\chi) \sin \nu \chi \int_{\phi}^{\phi+2\pi} d\psi f(\psi) \sin \nu \psi \right\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\nu^2}{4 \sin^2 \pi \nu} \left\{ \left[ \int_{\phi}^{\phi+2\pi} d\psi f(\psi) \cos \nu \psi \right]^2 + \left[ \int_{\phi}^{\phi+2\pi} d\psi f(\psi) \sin \nu \psi \right]^2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{4 \sin^2 \pi \nu} \left\{ \left[ \sum_{i=1}^N f_i \int_{\phi_i}^{\phi_i+\Delta\phi_i} d\psi \cos \nu \psi \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^N f_i \int_{\phi_i}^{\phi_i+\Delta\phi_i} d\psi \sin \nu \psi \right]^2 \right\} =$$

(10')

$$= \frac{1}{4 \sin^2 \pi \nu} \left\{ \left[ \sum_{i=1}^N 2f_i \sin \left( \frac{\nu \Delta\phi_i}{2} \right) \sin \nu \left( \phi_i + \frac{\Delta\phi_i}{2} \right) \right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[ \sum_{i=1}^N 2f_i \sin \left( \frac{\nu \Delta\phi_i}{2} \right) \cos \nu \left( \phi_i + \frac{\Delta\phi_i}{2} \right) \right]^2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 \pi \nu} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_i f_j \sin \frac{\nu \Delta\phi_i}{2} \sin \frac{\nu \Delta\phi_j}{2} \cos \delta_{ij}'$$

avendo posto

$$\delta_{ij}' = \nu \left( \phi_j + \frac{\Delta\phi_j}{2} - \phi_i - \frac{\Delta\phi_i}{2} \right)$$

$\delta_{ij}'$ , rappresenta la differenza di fase di betatrone tra i centri degli elem.  $i$ -esimo e  $j$ -esimo.

Eseguendo la media su un insieme di macchine si ottiene, dato che  $\langle f_i f_k \rangle = \langle f_i^2 \rangle \delta_{ik}'$

$$(11) \quad \langle V(\phi) \rangle = \frac{1}{\sin^2 \pi \nu} \sum_{i=1}^N \langle f_i^2 \rangle \sin^2 \frac{\nu \Delta\phi_i}{2}$$

Osserviamo che

$$\frac{\nu \Delta\phi_i}{2} \sim \frac{l_i}{2\beta_i} \ll 1$$

e quindi poniamo

$$\sin^2 \frac{\nu \Delta\phi_i}{2} \sim \frac{l_i^2}{4\beta_i^2}$$

Ricordando che  $f_i = F_i \beta_i^{3/2}$ , si può porre

$$(12) \quad \langle V(\phi) \rangle = \frac{1}{4 \sin^2 \pi \nu} \sum_{i=1}^N \langle F_i^2 \rangle l_i^2 \beta_i$$

Il valore quadratico medio dell'ampiezza massima dell'orbita

14.

chiusa risulta quindi:

$$(13) \quad (\bar{y}_{MAX MAX}^2)^{1/2} = \left[ \frac{\beta_{MAX}}{4 \sin^2 \pi \nu} \sum_{i=1}^N \langle F_i^2 \rangle l_i^2 \bar{\beta}_i \right]^{1/2}$$

$\beta_{MAX}$  può essere sostituito con  $(R/\nu) \mathcal{F}_{MAX}$ , dove  $\mathcal{F}_{MAX}$  è il fattore di forma massimo.

Nel caso di errori di allineamento  $F_i$  vale  $K_i \Delta x_i$ , pertanto  $\langle F_i^2 \rangle = K_i^2 \langle \Delta x_i^2 \rangle$ .

Quindi

$$(14) \quad (\bar{y}_{MAX MAX}^2)^{1/2} \underset{\text{disallineamenti}}{=} \left( \frac{R}{\nu} \mathcal{F}_{MAX} \sum_{i=1}^N K_i^2 l_i^2 \bar{\beta}_i \langle \Delta x_i^2 \rangle \right)^{1/2} \frac{1}{2 \sin \pi \nu}$$

La somma su tutti gli elementi deve essere eseguita tenendo conto del fatto che tutti gli elementi dello stesso tipo, per es. tutti i magneti con la stessa lunghezza e lo stesso indice di campo, che possono quindi considerarsi indistinguibili agli effetti dell'allineamento, hanno lo stesso valore di  $\langle \Delta x_i^2 \rangle$ .

Quindi l'ampiezza dell'orbita chiusa contiene un numero di contributi pari al numero di gruppi di elementi identici presenti nella macchina.

Per l'anello di accumulazione di Frascati si hanno solo due contributi, quello dei magneti e quello dei quadrupoli, dato che i quadrupoli focheg. e defoch. sono meccanicamente identici.

Riprendiamo ora la (10') scritta per gli errori di allineamento:

$$V(\phi) = \frac{1}{\sin^2 \pi \nu} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sin \frac{\nu \Delta \phi_i}{2} \sin \frac{\nu \Delta \phi_j}{2} \cos \delta_{ij} K_i K_j \beta_i^{3/2} \beta_j^{3/2} \Delta x_i \Delta x_j$$

e supponiamo che vi sia una parziale correlazione tra gli errori  $\Delta x$ . Questa correlazione sussiste, per quanto in modo del tutto formale, quando si decida di allineare due o più elementi continui in un unico "blocco" e successivamente allineare tra loro i blocchi.

Questa soluzione, utile per macchine di grandi dimensioni, è stata adottata per l'allineamento dell'anello di accumulazione da 1500 MeV di Frascati, che ha maglie di struttura:

$$(15) \quad 0/2 \quad Q_F \quad Q_D \quad M \quad Q_D \quad Q_F \quad 0/2:$$

i blocchi sono costituiti dai magneti curvanti e dai doppietti di quadrupoli focheggiante e defocheggiante contigui.

Se i due quadrupoli vengono allineati con "errori"  $\Delta x_1$  e  $\Delta x_2$  rispetto al riferimento del doppietto, e successivamente il doppietto viene allineato rispetto al riferimento dell'intera macchina con "errore"  $\delta_0$ , il primo quadrupolo avrà complessivamente un "errore"  $\Delta x_1 + \delta_0$ , e il secondo  $\Delta x_2 + \delta_0$ .

I termini  $(\Delta x_1 + \delta_0)$   $(\Delta x_2 + \delta_0)$  per due quadrupoli dello stesso doppietto hanno valore medio  $\langle \delta_0^2 \rangle \neq 0$  su un insieme di macchine e danno luogo al seguente contributo alla  $V(\phi)$  :

$$(16) \quad \frac{N_D}{\sin^2 \pi \nu} \langle \delta_0^2 \rangle \left\{ K_1^2 \beta_1^3 \sin^2 \left( \frac{\nu \Delta \phi}{2} \right)_1 + K_2^2 \beta_2^3 \sin^2 \left( \frac{\nu \Delta \phi}{2} \right)_2 + \right. \\ \left. + 2 K_1 K_2 \beta_1^{3/2} \beta_2^{3/2} \sin \left( \frac{\nu \Delta \phi}{2} \right)_1 \sin \left( \frac{\nu \Delta \phi}{2} \right)_2 \cos \delta_{12} \right\}$$

avendo indicato con  $N_D$  il numero dei doppietti, e con gli indici 1 e 2 i due quadrupoli di ciascun doppietto. La somma è stata eseguita tenendo conto della periodicità della macchina e della posizione simmetrica dei due doppietti di ciascuna maglia.

Nel caso pratico  $\delta_{ik}$  è molto piccolo e si può porre  $\cos \delta_{ik} \sim 1$ .

Ne segue un'orbita chiusa per errori di allineamento:

$$(17) \quad \bar{y}_{\text{MAX MAX}}^2 = \frac{R}{\nu} \frac{J_{\text{MAX}}}{4 \sin^2 \pi \nu} \left\{ N_D \langle \delta_0^2 \rangle (K_1 \sqrt{\beta_1} l_1 + K_2 \sqrt{\beta_2} l_2)^2 + \right. \\ \left. + N_D (K_1^2 \beta_1 l_1^2 + K_2^2 \beta_2 l_2^2) \langle \Delta x^2 \rangle_{\text{quadr}} + N_M K_M^2 \beta_M l_M^2 \langle \Delta x^2 \rangle_{\text{magn}} \right\}$$

dove l'indice  $M$  caratterizza i magneti.

Notiamo che la formula (17) è valida esclusivamente per una macchina con maglia data dalla (15).

#### 4. DISALLINEAMENTI AZIMUTALI ED ERRORI SULLE LUNGHEZZE.

Nella categoria degli errori di posizionamento rientrano i disallineamenti azimutali, cioè gli scorrimenti lungo l'orbita dei magneti e dei quadrupoli. Questo tipo di errore può venire schematizzato come una variazione delle lunghezze delle sezioni dritte, poste tra elemento e elemento, di quantità piccole e casuali, la cui somma lungo tutta la macchina è nulla.



Se gli elementi sono invece regolarmente posizionati dal punto di vista meccanico, ma le loro lunghezze magnetiche variano in modo casuale, la situazione può essere schematizzata con una macchina in cui siano variate le lunghezze delle sezioni dritte e di tutti gli elementi magnetici, con variazioni però correlate e tali che la lunghezza complessiva dell'orbita resti invariata.

I due tipi di errori detti non sono mai separabili in una macchina reale, la quale potrà essere descritta con una struttura in cui tutte le lunghezze sono affette da errori casuali e incorrelati.

Esaminiamo i vari effetti di una configurazione di questo tipo.

Poichè il piano mediano della macchina non ha subito variazioni, non ci possono essere effetti di accoppiamento, ma solo modifiche delle orbite chiuse sul piano radiale e delle caratteristiche dei due moti di betatrone.

Per vedere l'effetto sulle orbite chiuse consideriamo una macchina in cui i magneti curvanti hanno lunghezze prive di errori e sono perfettamente posizionati l'uno rispetto all'altro, mentre i quadrupoli hanno errori di allineamento e di lunghezze.

L'orbita chiusa principale in una macchina perfetta con periodicità definita è costituita generalmente da tratti di arco di cerchio nei magneti curvanti sui quali il campo è costante, e tratti dritti raccordati con continuità, passanti per le sezioni dritte e per gli assi dei quadrupoli, lungo i quali il campo è identicamente nullo. Nella macchina che ha errori solo nei quadrupoli, i tratti rettilinei continuano a essere linee di campo nullo, quindi la particella sincrona continua a percorrere l'orbita costituita da archi di cerchio e tratti rettilinei, indipendentemente da disallineamenti ed errori di lunghezza dei quadrupoli. Si può quindi concludere che solo gli errori di lunghezza e allineamento dei magneti possono produrre variazioni delle orbite chiuse.

Tutti gli elementi contribuiscono invece a modificare le frequenze di betatrone: infatti la matrice di macchina è il prodotto delle matrici variate di tutti gli elementi, quindi anche la sua traccia sarà variata.

Calcoliamo per prima cosa la variazione di frequenza.

Introduciamo a un estremo di ciascun elemento un elemento dello stesso tipo di lunghezza  $\delta l_j$  che può essere descritto con una matrice di lente sottile:

$$(18) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k_j \delta l_j & 1 \end{pmatrix} = 1 + k_j \delta l_j \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 + k_j \delta l_j \Delta_1$$

con  $|K_j| = \begin{cases} \frac{G}{B\beta} & \text{per i quadrupoli} \\ \frac{1-n}{\beta^2}, \frac{n}{\beta^2} & \text{per i magneti.} \end{cases}$

Aggiungiamo anche sezioni dritte di lunghezza  $dl_k$ , descritte dalle matrici

$$(19) \quad \begin{pmatrix} 1 & dl_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 + dl_k \underline{\Delta}_2$$

In questa schematizzazione le  $dl_j$  e le  $dl_k$  sono incorrelate e possono assumere eventualmente valori negativi.

La matrice totale di un giro, indicando con  $A_k$  le matrici parziali imperturbate, e con  $D_k$  le matrici date dalla (18) e dalla (19), si può mettere nella forma:

$$(20) \quad M = A_1 D_1 A_2 D_2 \dots A_N D_N$$

La (20) si può decomporre in una somma di prodotti di matrici, dei quali conserviamo solo quelli con elementi di ordine  $< 2$  nelle  $dl_j$  o  $\delta l_j$ :

Il termine di ordine zero è la matrice imperturbata  $M_0$ . Ne segue:

$$(21) \quad \underline{M} = \underline{M}_0 + \sum_{j=1}^N \frac{j}{\pi} A_k \Delta_1 \frac{\pi}{l=j} A_l K_j' dl_j + \\ + \sum_{j=1}^N \frac{j}{\pi} A_k \Delta_2 \frac{\pi}{l=j} A_l \delta l_j$$

Poichè  $\text{Tr } A B C = \text{Tr } C A B = \text{Tr } B C A$ , si può scrivere:

$$(22) \quad \text{Tr } M = \text{Tr } M_0 + \sum_{j=1}^N K_j' dl_j \text{Tr} (\Delta_1 M_0^j) + \\ + \sum_{j=1}^N \delta l_j \text{Tr} (\Delta_2 M_0^j)$$

avendo indicato con  $M_0^j$  la matrice imperturbata di un giro calcolata nel punto  $j$ , che si può mettere nella forma:

$$M_0^j = 1 \cos 2\pi \nu_0 + \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} \sin 2\pi \nu_0$$

Quindi  $\text{Tr} (\Delta_1 M_0^j) = \beta_j \sin 2\pi \nu_0$

$$\text{Tr} (\Delta_2 M_0^j) = -\beta_j \sin 2\pi \nu_0$$

Sostituendo nella (22):

$$\frac{Tr M - Tr M_0}{\sin 2\pi \gamma_0} = \sum_{j=1}^N K_j \beta_j dl_j - \sum_{j=1}^N \gamma_j dl_j .$$

Passando alle frequenze:

$$\frac{\Delta(m 2\pi \nu)}{\sin 2\pi \nu} = -2\pi \Delta \nu = \sum_{j=1}^N K_j \beta_j dl_j - \sum_{j=1}^N \gamma_j dl_j$$

e quindi

$$\Delta \nu = \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{j=1}^N \gamma_j dl_j - \sum_{j=1}^N K_j \beta_j dl_j \right\}$$

$$(23) \quad \langle \Delta \nu^2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \left\{ \langle dl^2 \rangle \sum_{j=1}^N \gamma_j^2 + \langle dl^2 \rangle_Q \sum_{j=1}^N K_j^2 \beta_j^2 + \right.$$

$$\left. + \langle dl^2 \rangle_M \sum_{j=1}^N K_j^2 \beta_j^2 \right\}$$

avendo indicato con  $\langle dl^2 \rangle_Q$  l'errore  $q$  medio per i quadrupoli e con  $\langle dl^2 \rangle_M$  quello dei magneti, errori che a priori possono essere diversi.

Vogliamo precisare alcuni concetti sulla definizione di orbita chiusa, prima di procedere al calcolo degli effetti degli errori azimutali.

Ragioniamo per semplicità solo sull'orbita chiusa sincrona, essendo già noto il modo di calcolare le orbite di energia variata: consideriamo quindi solo particelle monocromatiche di energia  $E_s$ .

Una particella di energia  $E_s$  può percorrere in un elemento della macchina, magnete o quadrupolo,  $\omega^2$  traiettorie, definite dalle condizioni iniziali. Se scegliamo come sistema di riferimento intrinseco dell'elemento una qualunque di queste traiettorie, rispetto ad esso le equazioni del moto sono della forma

$$(24) \quad \ddot{x} + Kx = 0$$

L'invarianza dell'equazione del moto al variare del riferimento nella famiglia delle possibili traiettorie, proprietà che deriva dalla linearità dell'equazione del moto stessa, permette di definire una matrice dell'elemento in questione associata all'equazione (24). Come sistema di riferimento per tutta la macchina si sceglie l'orbita chiusa sincrona che è la soluzione, continua con le sue derivate, periodica su un giro: soluzione costituita da un particolare insieme di soluzioni parziali raccordate con continuità, ovvero da un

insieme di riferimenti intrinseci.

Con l'introduzione dell'orbita chiusa come riferimento risulta possibile definire una matrice di tutta la macchina, data dal prodotto delle matrici di tutti gli elementi.

In una macchina reale, con errori sulle lunghezze e sulle posizioni degli elementi, non è detto che l'orbita chiusa sincrona calcolata nel caso di macchina perfetta abbia ancora il carattere di traiettoria fisica, tuttavia possiamo continuare a usarla come riferimento rispetto a cui calcolare le nuove traiettorie fisiche, e in particolare la nuova orbita chiusa.

Questo calcolo può essere eseguito per due vie diverse. In primo luogo si può cercare la soluzione fisica chiusa delle equazioni del moto espresse con riferimento all'orbita chiusa ideale: nel caso di errori di allineamento radiali e verticali, nel capitolo precedente, è stato usato questo criterio, ed il calcolo è stato semplice perchè le equazioni continuavano ad essere lineari e vi si aggiungeva semplicemente un termine non omogeneo. L'altro metodo, che nel caso di errori azimutali è più semplice e intuitivo, consiste nel risolvere separatamente le equazioni del moto nei sistemi di riferimento intrinseci degli elementi, e quindi, disinteressandosi dell'andamento delle soluzioni punto per punto, considerarne soltanto i valori all'ingresso e all'uscita degli elementi, e raccordarli tra loro tenendo conto delle discontinuità radiali e angolari tra i riferimenti intrinseci e il riferimento chiuso ideale: tutto ciò si può fare per mezzo delle matrici e dell'aggiunta di opportuni spinori che descrivano il cambiamento del riferimento.

Una macchina viene generalmente progettata in modo che nel caso ideale senza errori l'orbita chiusa sincrona sia una curva piana di forma particolarmente semplice: noi abbiamo considerato finora macchine con orbita chiusa sincrona costituita da archi di cerchio di raggio costante  $\rho$  e tratti dritti. Studiamo quindi per una macchina siffatta il moto di betatrone radiale di una particella descritta da uno spinore  $\begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}$  in un magnete di lunghezza variata  $L + dl$ , che abbia il primo estremo regolarmente posizionato rispetto alla orbita ideale. In uscita dal magnete la particella avrà subito una deflessione  $(L+dl)/\rho = \theta + d\theta$ , cioè avrà un angolo, rispetto al sistema di riferimento ideale, dato da  $x'_0$  finale  $+ d\theta$ . Il calcolo mediante matrici non tiene conto dell'angolo  $d\theta$ , quindi bisognerà aggiungere allo spinore in uscita  $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$  uno spinore  $\begin{pmatrix} 0 \\ d\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ dl/\rho \end{pmatrix}$ . Notiamo che  $dl$  può anche essere  $< 0$ .

Se invece il magnete è disallineato in senso azimutale, cioè ruotato di un angolo  $\delta\theta$  intorno a un asse verticale passante per il centro di curvatura, si dovrà aggiungere in ingresso uno spinore  $\begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix}$  e sottrarlo all'uscita. In questo caso  $d\theta = (\delta\ell/\rho)$  dove  $\delta\ell$  rappresenta il disallineamento azimutale.

Per fare una trattazione generale che comprenda sia i disallineamenti sia le fluttuazioni dei magneti useremo lo accorgimento di sommare allo spinore che descrive il moto di betatrone uno spinore  $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\Delta l_j}{\rho} \end{pmatrix}$  all'ingresso e all'uscita di ogni magnete, con i  $\Delta l_j$  piccoli e casuali.

Si dovrebbe tenere conto anche di discontinuità nel riferimento, oltre che nella sua derivata, ma è immediato verificare che queste discontinuità sono del secondo ordine in  $\Delta l_j$ .

Si può in questo modo calcolare lo spinore dopo un giro e imporre che coincida con  $\begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}$  cioè che lo spinore di valore iniziale  $\begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}$  descriva lungo la macchina l'orbita chiusa. Le componenti  $x_0$  e  $x'_0$  saranno soluzioni di un sistema di due equazioni lineari, i cui termini non omogenei sono combinazioni lineari degli angoli casuali  $(\Delta l_j/\rho)$ .

Indichiamo con  $M_1$  la matrice di trasferimento dalla origine, per ora arbitraria, dell'ascissa curvilinea al punto iniziale del primo magnete, con  $M_2$  la matrice di trasferimento del primo magnete, con  $M_3$  la matrice di trasferimento dal punto finale del primo magnete al punto iniziale del secondo, ecc. Sia  $N$  il numero totale di queste matrici. Poniamo  $v_j = (\Delta l_j/\rho)$ . Lo spinore finale  $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$  è dato da:

$$(25) \quad \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = M_N \{ M_{N-1} \dots \{ M_2 \{ M_1 \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \} + \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \} \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_{N-1} \end{pmatrix} \} + \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_N \end{pmatrix}$$

Sviluppando i prodotti si ha:

$$(26) \quad \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = M_N M_{N-1} \dots M_2 M_1 \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} + M_N M_{N-1} \dots M_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_1 \end{pmatrix} + M_N M_{N-1} \dots M_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + \dots + M_N M_{N-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_{N-2} \end{pmatrix} + M_N \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_{N-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_N \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che  $M_N \dots M_1$  è la matrice di trasferimento di un giro di macchina, calcolata nel punto iniziale, e la indicheremo con  $\mathcal{M}^{(0)}$ ; e che gli altri prodotti, che indicheremo con  $\mathcal{M}^{(k)}$ , rappresentano le matrici di trasferimento parziali dal punto iniziale ai vari punti della macchina che sono punti estremi dei magneti.

Introducendo la notazione  $\mathcal{M}^{(N+1)} = \mathbb{1}$ , (matrice unità) la (26) si può scrivere più concisamente

$$(27) \quad \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \mathcal{M}^{(0)} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^N \mathcal{M}^{(j+1)} \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_j \end{pmatrix}.$$

Imponendo che  $\begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ , cioè la condizione dell'orbita chiusa, la (27) si spezza nelle due equazioni lineari

$$(28) \quad \begin{cases} (M_{11}^{(0)} - 1)x_0 + M_{12}^{(0)}x'_0 = -\sum_{j=1}^N M_{12}^{(j+1)}\theta_j \\ M_{21}^{(0)}x_0 + (M_{22}^{(0)} - 1)x'_0 = -\sum_{j=1}^N M_{22}^{(j+1)}\theta_j \end{cases}$$

Indicando con  $\delta_1$  e  $\delta_2$  i termini a secondo membro e risolvendo per  $x_0$  si ha:

$$(29) \quad x_0 = \frac{\delta_1 (M_{22}^{(0)} - 1) - \delta_2 M_{12}^{(0)}}{\text{Det}(M_0 - \mathbb{1})}$$

Osserviamo che gli elementi delle matrici  $M^{(0)}$  e  $M^{(k)}$  al 1° ordine contengono termini di ordine 0 e 1 nelle lunghezze  $\Delta l_j$ , e che le  $\delta_1$  e  $\delta_2$  contengono quindi termini di ordine 1 e 2 nelle  $\Delta l_j$ . Per avere un risultato al 1° ordine dobbiamo quindi usare le matrici parziali e totale della macchina senza errori. Questa approssimazione significa trascurare l'effetto degli errori sulle proprietà focogianti.

La matrice di trasferimento tra due punti generici della macchina perfetta ha un'espressione che dipende dai valori dei parametri di macchina  $\beta$  e  $\alpha$  dei punti iniziale e finale e dallo sfasamento di betatrone tra i due punti; indicando con l'indice 0 il punto iniziale, si ha:

$$M^{(j+1)} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\beta_{j+1}}}{\beta_0} (\cos \nu \phi_{j+1} + \alpha_0 \sin \nu \phi_{j+1}) & ; & \sqrt{\beta_0 \beta_{j+1}} \sin \nu \phi_{j+1} \\ \frac{-(1 + \alpha_0 \alpha_{j+1})}{\sqrt{\beta_0 \beta_{j+1}}} \sin \nu \phi_{j+1} + \frac{\alpha_0 - \alpha_{j+1}}{\sqrt{\beta_0 \beta_{j+1}}} \cos \nu \phi_{j+1} & ; & \frac{\sqrt{\beta_0}}{\beta_{j+1}} (\cos \nu \phi_{j+1} - \alpha_{j+1} \sin \nu \phi_{j+1}) \end{pmatrix}$$

Il punto iniziale è stato considerato origine di  $\phi$ .

Quindi  $\delta_1$  e  $\delta_2$  sono dati da:

$$(30) \quad \begin{cases} \delta_1 = -\sum_{j=1}^N \theta_j \sqrt{\beta_0} \sqrt{\beta_{j+1}} \sin \nu \phi_{j+1} \\ \delta_2 = -\sum_{j=1}^N \theta_j \frac{\sqrt{\beta_0}}{\beta_j} (\cos \nu \phi_{j+1} - \alpha_j \sin \nu \phi_{j+1}) \end{cases}$$

Calcolando il valore quadratico medio di  $x_0$  e sostituendovi le espressioni (30) delle  $\delta_1$  e  $\delta_2$  si ha:

$$\begin{aligned}
 \langle x_0^2 \rangle &= \frac{\langle \vartheta^2 \rangle}{4(1-\cos 2\pi\nu)^2} \left[ \beta_0 (\cos 2\pi\nu - \alpha_0 \sin 2\pi\nu - 1)^2 \sum_{j=1}^N \beta_j \sin^2 \nu \phi_j + \right. \\
 &+ \beta_0^3 \sin^2 2\pi\nu \sum_{j=1}^N \frac{(\cos \nu \phi_j - \alpha_j \sin \nu \phi_j)^2}{\beta_j} - 2\beta_0^2 \sin 2\pi\nu \cdot \\
 &\left. \cdot (\cos 2\pi\nu - \alpha_0 \sin 2\pi\nu - 1) \sum_{j=1}^N \sin \nu \phi_j (\cos \nu \phi_j - \alpha_j \sin \nu \phi_j) \right]
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

La dipendenza di  $\langle x^2 \rangle$  dall'ascissa curvilinea è contenuta in  $\beta_0$ ,  $\alpha_0$ , e negli sfasamenti relativi al punto iniziale. Vogliamo però osservare che le operazioni di quadrato e di valor medio hanno eliminato formalmente il carattere casuale dell'effetto, e quindi la dipendenza di  $\langle x_0^2 \rangle$  dalla ascissa curvilinea lungo la macchina deve rispettare la periodicità e le simmetrie geometriche: cioè  $\langle x_0^2 \rangle$  deve essere una funzione di  $s$  pari rispetto ai punti di simmetria della macchina, e in questi punti deve avere i massimi e i minimi. E' quindi sufficiente per una data macchina calcolare  $\langle x^2 \rangle$  nei punti di simmetria geometrica. Il massimo valore trovato rappresenta il valore quadratico medio dello sfasamento massimo dell'orbita chiusa.

## PARTE II - ERRORI SISTEMATICI.

### 1. ERRORI SISTEMATICI.

In questo capitolo faremo alcune considerazioni sugli errori sistematici, applicabili in generale alle macchine a funzioni separate, che hanno tre parametri liberi di varia re per migliorare le caratteristiche di funzionamento:  $f_{RF}$ , frequenza della radiofrequenza;  $B$ , campo magnetico guida;  $K = (G/\beta g)$ , parametro legato al gradiente dei quadrupoli. Nelle macchine a funzioni separate  $K$  determina le frequenze di betatrone  $\nu$ , quindi con opportune variazioni di  $K$  si possono compensare tutti gli errori sistematici che danno luogo a variazioni di  $\nu$ .

$B$  e  $f_{RF}$  permettono di modificare le orbite chiuse, nel senso che verrà specificato più avanti, e con variazioni di  $B$  ed  $f_{RF}$  si possono compensare tutti gli errori sistematici che hanno come effetto la trasformazione di una orbita chiusa corrispondente a una data energia in un'altra orbita chiusa della stessa famiglia, corrispondente cioè a una diversa energia.

Specificheremo ciò con alcuni esempi nel caso particolare dell'anello di accumulazione di Frascati osservando nel frattempo quali errori sistematici non sono compensabili o lo sono solo parzialmente. Con il termine compensazione qui e nel seguito si intende il modificare le caratteristiche di una macchina reale affetta da errori sistematici, riportandola a una macchina con parametri eventualmente diversi ma con caratteristiche di funzionamento ideali.

Seguiremo lo stesso ordine di trattazione usato per gli errori casuali.

### 2. ERRORI SULL'INDICE DI CAMPO $n$ .

Gli errori sull'indice di campo possono essere di due tipi:

a) errore sull'andamento di  $n$  in direzione radiale sul piano mediano dei magneti; questo errore comporta una variazione delle dimensioni della zona utile e non può essere compensato durante il funzionamento.

b) errore sul valore di  $n$  al centro della zona utile, che comporta una variazione delle frequenze di betatrone, sempre compensabile mediante i  $K$ , e una variazione delle costanti di smorzamento che stimiamo nel modo seguente.

Ricordiamo le formule che esprimono gli inversi delle



costanti di smorzamento<sup>(3)</sup> dei moti di betatrone, radiale e verticale, e di sincrotrone

$$\gamma_R^{-1} = \frac{4,22 \cdot 10^{-6} E_s^3}{2l_0} \left\{ \oint \frac{ds}{\rho^2} - \oint (1-2n(s)) \frac{\psi(s)}{\rho^3} ds \right\}$$

$$\gamma_V^{-1} = \frac{4,22 \cdot 10^{-6} E_s^3}{2l_0} \oint \frac{ds}{\rho^2}$$

$$\gamma_S^{-1} = 3\gamma_V^{-1} - \gamma_R^{-1}$$

dove  $E_s$  è l'energia sincrona in MeV,  $l_0$  la lunghezza della orbita chiusa sincrona (metri),  $\rho$  il raggio di curvatura (metri),  $s$  l'ascissa curvilinea (metri),  $\psi(s)$  lo spostamento (centimetri) dell'orbita chiusa nel punto  $s$  in corrispondenza a un'energia variata dell'1% rispetto all'energia sincrona.

Se  $n = 0,5$  si ha:

$$\gamma_R = \gamma_V = 2\gamma_S$$

Se  $n = 0,5 + \epsilon$ , la variazione di  $\gamma_R^{-1}$  è data da:

$$\frac{\delta \gamma_R^{-1}}{\gamma_R^{-1}} = \frac{2\epsilon}{\rho^3} \frac{\oint \psi(s) ds}{\oint \frac{ds}{\rho^2}} = \frac{2n}{S} \frac{\int \psi(s) ds}{\oint ds} \frac{\Delta n}{n}$$

dove l'integrale a numeratore è esteso ai magneti curvanti. Indicando con  $L$  la lunghezza di un magnete,  $N$  il numero di magneti,  $\bar{\psi}$  il valore medio di  $\psi(s)$  lungo un magnete, si ottiene:

$$\left| \frac{\delta \gamma_R^{-1}}{\gamma_R^{-1}} \right| = \left| \frac{\delta \gamma_R}{\gamma_R} \right| = \left| \frac{\delta \gamma_S}{\gamma_S} \right| = \frac{2n}{S} \left| \frac{\Delta n}{n} \right| \frac{\bar{\psi} NL}{NL} = \frac{2n}{S} \bar{\psi} \left( \frac{\Delta n}{n} \right).$$

### 3. DISALLINEAMENTI SISTEMATICI.

Consideriamo una macchina perfetta costituita da magneti curvanti e quadrupoli, per questa macchina scegliamo come orbita chiusa sincrona  $O$  l'orbita costituita da archi di cerchio giacenti sul piano mediano dei magneti, al centro della zona utile, raccordati con continuità a tratti rettilinei coincidenti con gli assi dei quadrupoli. Siano  $B$  e  $\rho$  i valori del campo magnetico e del raggio di curvatura nei tratti di orbita chiusa che passano nei magneti.

Una particella che percorre l'orbita  $O$  ha un'energia ben definita proporzionale al prodotto  $B\rho$  e una frequenza di rotazione  $f_0$  che dipende dalla lunghezza della

orbita: regoliamo la frequenza della radiofrequenza al valore  $f_{RF} = k f_0$ , con  $k$  numero intero (armonica) in modo che la particella sia in fase con la radiofrequenza e acquisti a ogni giro la stessa energia  $V \sin \varphi_s$ .

Una particella di energia diversa da  $E$  percorre, come è noto, se ha opportune condizioni iniziali, un'orbita chiusa diversa per forma e lunghezza, con una diversa frequenza di rotazione: questa particella non può essere sincrona ma avrà delle oscillazioni di fase.

Supponiamo ora di assegnare ai magneti curvanti uno spostamento radiale sistematico  $\Delta \rho$ , tale che sull'orbita chiusa  $O$ , alla quale ora diamo il significato di curva geometrica di riferimento non più solidale alla macchina, il valore del campo magnetico, al raggio  $\rho$ , sia  $B(1 + \eta)$ , esiste una nuova particella in grado di percorrere l'orbita  $O$ , e la sua energia è  $E(1 + \eta)$ . Questa nuova particella è particella sincrona, con la stessa frequenza  $f_{RF}$  precedentemente definita, dato che non è cambiata la lunghezza dell'orbita  $O$ , mentre la particella di energia  $E$  non è più sincrona in quanto percorre un'orbita variata, e altrettanto vale per particelle di ogni altra energia.

Un disallineamento sistematico dei magneti dunque non produce alcun effetto e mantiene all'orbita  $O$  il carattere di orbita sincrona. Un limite al valore del disallineamento può essere tuttavia fissato compatibilmente con le seguenti condizioni:

- a) l'energia  $E(1 + \eta)$  deve essere presente nel fascio iniettato;
- b) il valore  $B(1 + \eta)$  del campo deve cadere nella zona utile dei magneti.

Supponiamo che oltre ai magneti vi siano più tipi di quadrupoli e che ciascun tipo abbia un diverso disallineamento radiale.

Rappresentando i disallineamenti con l'introduzione di opportuni spinori è possibile calcolare l'orbita chiusa  $O'$  percorsa nella macchina reale dalla particella di energia  $E$  che nella macchina perfetta avrebbe percorso l'orbita  $O$ .

Gli scostamenti di  $O'$  rispetto a  $O$  variano con l'ascissa curvilinea  $S$  su  $O$  e in genere non sono simmetrici rispetto a  $O$ ; l'orbita  $O'$  può essere anche tutta spostata verso l'interno o verso l'esterno di  $O$ .

Interessa naturalmente conoscere il massimo e il minimo scostamento di  $O'$  da  $O$  ( $x_{\max}$  e  $x_{\min}$ ) per poter definire i massimi disallineamenti dei quadrupoli che producono un'orbita  $O'$  ancora sufficientemente centrata nella zona utile dei magneti. Calcoliamo ora  $x_{\max}$  e  $x_{\min}$  in funzione dei disallineamenti  $\Delta_F$  e  $\Delta_D$  dei due tipi di quadrupoli presenti in macchina nel caso dell'anello di accumulazione

di Frascati. La maglia periodica di Adone è del tipo

$$0 \quad Q_F \quad O_1 \quad Q_D \quad O_2 \quad B \quad O_2 \quad Q_D \quad O_1 \quad Q_F \quad 0$$

dove 0 indica sezione dritta, B magnete curvante,  $Q_F$  e  $Q_D$  quadrupoli rispettivamente foccheggiante e defoccheggiante nella direzione radiale.

I punti estremi della maglia e il punto centrale del magnete sono punti di simmetria della struttura e devono coincidere con i punti di massimo e di minimo dell'orbita  $O'$ .

Il vettore orbita chiusa sarà quindi del tipo  $\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$  nei punti iniziale e finale del periodo e del tipo  $\begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ 0 \end{pmatrix}$  nel punto centrale del magnete. Indicando con l'indice degli elementi le corrispondenti matrici e schematizzando i disallineamenti con spinori  $\begin{pmatrix} + \\ \Delta_F \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} + \\ \Delta_D \end{pmatrix}$  che rappresentano uno spostamento del sistema di riferimento dei quadrupoli, si ottengono le seguenti condizioni per i vettori orbita chiusa:

$$M_{B/2} M_{O2} \left[ M_D \left[ M_{O1} \left[ M_F \left[ M_O \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta_F \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} \Delta_F \\ 0 \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} \Delta_D \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} \Delta_D \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_O \left[ M_F \left[ M_{O1} \left[ M_D \left[ M_{O2} M_{B/2} \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta_D \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} \Delta_D \\ 0 \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} \Delta_F \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} \Delta_F \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esplicitando le prime due componenti si ottiene

$$a_1 x_0 - \bar{x}_0 = b_1 \Delta_F + c_1 \Delta_D$$

$$-x_0 + a_2 \bar{x}_0 = b_2 \Delta_F + c_2 \Delta_D$$

dove:  $a_1$  è l'elemento 11 della matrice di trasferimento dal punto iniziale della maglia al punto centrale del magnete B

$a_2$  è l'elemento 11 della matrice della residua mezza maglia

$b_1$  è l'elemento 11 della matrice  $M_{B/2} M_{O2} M_D M_{O1} (M_F - 1)$

$b_2$  è l'elemento 11 della matrice  $M_O (M_F - 1)$

$c_2$  è l'elemento 11 della matrice  $M_O M_F M_{O1} (M_D - 1)$ .

$c_1$  è l'elemento 11 della matrice  $M_{B/2} M_{O2} (M_D - 1)$

Si ottiene:

$$x_0 = \Delta_F \frac{a_2 b_1 + b_2}{a_1 a_2 - 1} + \Delta_D \frac{a_2 c_1 + c_2}{a_1 a_2 - 1}$$

(32)

$$\bar{x}_0 = \Delta_F \frac{a_1 b_2 + b_1}{a_1 a_2 - 1} + \Delta_D \frac{a_1 c_2 + c_1}{a_1 a_2 - 1}$$

e inoltre il valore medio dello spostamento:

$$\frac{x_0 + \bar{x}_0}{2} = \frac{\Delta_F [(a_2 + 1)b_1 + (a_1 + 1)b_2] + \Delta_D [(a_2 + 1)c_1 + (a_1 + 1)c_2]}{2(a_1 a_2 - 1)}$$

e la semiampiezza:

$$\left| \frac{x_0 - \bar{x}_0}{2} \right| = \left| \frac{\Delta_F [(a_2-1)b_1 - (a_1-1)b_2] + \Delta_D [(a_2-1)c_1 - (a_1-1)c_2]}{2(a_1 a_2 - 1)} \right|$$

Nel caso dei disallineamenti verticali l'unica orbita chiusa imperturbata è un'orbita che giace nel piano mediano dei magneti ed è indipendente dall'energia, di conseguenza qualunque sia l'energia della particella l'orbita variata prodotta da disallineamenti verticali dei quadrupoli è unica ed è definita dalle relazioni (32).

Come casi particolari uno dei disallineamenti può essere zero, o si può avere  $\Delta_F = \Delta_D$ : se i disallineamenti sono uguali significa voler considerare soltanto disallineamenti globali dei doppietti di quadrupoli  $Q_F$  e  $Q_D$  contigui.

In radiale, per ogni energia  $E$  diversa dall'energia sincrona  $E_s$  che corrisponde all'orbita 0, si ha un'orbita chiusa i cui scostamenti da 0 sono definiti secondo le consuete notazioni da:

$$(33) \quad \psi(s) \frac{E - E_s}{E_s}$$

Poichè le formule (32) che danno l'orbita variata dovuta ai disallineamenti sono indipendenti dall'energia, nella macchina con disallineamenti la famiglia delle orbite chiuse per diverse energie sarà definita da:

$$(34) \quad O'(s) + \psi(s) \frac{E - E_s}{E_s}$$

La banda di energie accettate è centrata sull'energia sincrona, quindi la famiglia di curve (33) è simmetrica rispetto all'orbita sincrona, e la famiglia (34) in genere può essere spostata. Esiste però certamente un'energia  $E^*$  tale che la curva (34) corrispondente abbia valore medio nullo, cioè:

$$\frac{x_0 + \bar{x}_0}{2} + \frac{(\psi_0 + \bar{\psi}_0)}{2} \frac{E^* - E_s}{E_s} = 0$$

Variando la frequenza  $f_{RF}$  si può rendere sincrona l'energia  $E^*$  e di conseguenza accettare nell'anello una banda di energie centrata su  $E^*$ , a cui corrisponde una famiglia di orbite (34) simmetrica rispetto a 0.

Con questo accorgimento la zona utile viene utilizzata nel modo migliore e l'effetto dei disallineamenti radiali si riduce a produrre una semiampiezza massima

$$\left| \frac{x_0 - \bar{x}_0}{2} \right|$$

La nuova famiglia di orbite chiuse radiali per le varie energie è definita dalla (34), e l'orbita 0 non appartiene alla famiglia, neppure nel caso  $\Delta_F = \Delta_D = \Delta$ , cioè nel caso di disallineamento dei doppietti.

In questo caso, però, se ci interessa avere un riferimento orbita chiusa di forma geometrica semplice, possiamo sceglierlo nell'orbita simile a 0 che passa per gli assi dei doppietti disallineati della quantità  $\Delta$ , ed è facile rendersi conto che la situazione riferita a questa nuova orbita è quella di una macchina con magneti disallineati di  $-\Delta$ , che è già stata trattata. Naturalmente per passare a questa situazione bisogna variare  $f_{RF}$  ed è necessario che il disallineamento  $\Delta$  sia piccolo rispetto alla dimensione radiale della zona utile dei magneti.

#### 4. ERRORI SISTEMATICI SULLE LUNGHEZZE.

Un errore sistematico sulle lunghezze dei quadrupoli dà luogo a una variazione delle frequenze di betatrone sempre compensabile, in quanto il parametro fondamentale del quadrupolo è, almeno in prima approssimazione, il prodotto  $KL$ .

Una variazione sistematica  $\Delta l$  delle lunghezze dei magneti, senza contemporanea variazione del raggio di curvatura, dà luogo a un'orbita chiusa valutabile in modo analogo a quanto fatto per i corrispondenti errori casuali. Di questa orbita ci limiteremo a calcolare la semiampiezza in quanto la posizione media può essere centrata nella zona utile come è già stato visto nel caso dei disallineamenti radiali dei quadrupoli.

Consideriamo per semplicità una macchina con maglia simmetrica rispetto al centro del magnete e indichiamo con  $M_1$  la matrice di trasferimento dal punto iniziale della maglia al punto iniziale del magnete, con  $M_2$  la matrice di mezzo magnete, con  $M'_1$  la matrice dal punto finale del magnete al punto finale della maglia.

Definiamo inoltre le seguenti matrici:

$$\begin{aligned} M_0 &= M_2 M_1 \\ M'_0 &= M'_1 M_2 \end{aligned}$$

e sia  $\alpha = (\Delta l / \rho)$  l'angolo tra il riferimento del magnete di raggio di curvatura  $\rho$  rispetto al riferimento 0 della macchina perfetta.

Imponiamo che l'orbita chiusa variata abbia tangente orizzontale nei punti di simmetria, e sia rappresentata dagli spinori  $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$  nei punti estremi della maglia e  $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$  nel punto centrale del magnete.

Queste condizioni si scrivono in notazioni vettoriali

$$M_2 \left[ M_1 \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_1' \left[ M_2 \left\{ \begin{pmatrix} \bar{x} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix} \right\} - \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

o anche:

$$M_0 \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{x} \\ 0 \end{pmatrix} = (1 - M_2) \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + M_0' \begin{pmatrix} \bar{x} \\ 0 \end{pmatrix} = M_1' (1 - M_2) \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix} = M_0' (M_2^{-1} - 1) \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix}$$

Con le posizioni

$$a_1 = \text{elemento } 11 \text{ di } M_0$$

$$a_2 = \text{elemento } 11 \text{ di } M_0'$$

$$c_1 = \text{elemento } 12 \text{ di } (1 - M_2)$$

$$c_2 = \text{elemento } 12 \text{ di } M_0' (M_2^{-1} - 1)$$

si ottengono le seguenti equazioni per le prime componenti

$$a_1 x - \bar{x} = c_1 \theta$$

$$-x + a_2 \bar{x} = c_2 \theta$$

da cui si ottiene la semiampiezza:

$$\left| \frac{x - \bar{x}}{2} \right| = \frac{1}{2} \frac{|\theta|}{|a_1 a_2 - 1|} |c_1 (a_2 - 1) - c_2 (a_1 - 1)|$$

Indicando con  $(\mu/2)$  l'angolo di betatrone di mezza maglia, con  $\beta_0$  e  $\beta_M$  i valori di  $\beta$  rispettivamente nei punti estremi e nel punto centrale della maglia, e con  $m_{ik}$  gli elementi della matrice  $M_2$  di mezzo magnete, si trova la seguente espressione per la semiampiezza:

$$\left| \frac{x - \bar{x}}{2} \right| = \frac{|\theta|}{2 \sin^2 \frac{\mu}{2}} \left| m_{12} \left( \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta_M}} \cos \frac{\mu}{2} - 1 \right) - \left( \sqrt{\frac{\beta_M}{\beta_0}} \cos \frac{\mu}{2} - 1 \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[ -m_{12} \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta_M}} \cos \frac{\mu}{2} + \sqrt{\beta_0 \beta_M} \sin \frac{\mu}{2} (m_{11} - 1) \right] \right| =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{|\theta|}{2 \sin^2 \frac{\mu}{2}} \left| -m_{12} \tan^2 \frac{\mu}{2} + \sqrt{\beta_0 \beta_M} \sin \frac{\mu}{2} (m_{11} - 1) \right| = \\
 &= \frac{1}{2} |\theta| \left| m_{12} - \frac{m_{11} - 1}{\sin \frac{\mu}{2}} \sqrt{\beta_0 \beta_M} \right|.
 \end{aligned}$$

Ricordando che  $\theta = (\Delta l / \rho)$  si ottiene il "fattore di amplificazione":

$$\left| \frac{\frac{x - \bar{x}}{2}}{\Delta l} \right| = \frac{1}{2 \rho} \left| m_{12} - \frac{m_{11} - 1}{\sin \frac{\mu}{2}} \sqrt{\beta_0 \beta_M} \right|.$$

## PARTE III - EFFETTI NON LINEARI.

## 1. LE RISONANZE NELLA TRAIETTORIA LINEARE.

Consideriamo la matrice  $M$  di un periodo di macchina relativa a un moto di betatrone.

Se la traccia di  $M$  è in modulo minore di 2, si può porre

$$\frac{1}{2} \text{Tr } M = \cos \mu$$

con  $\mu$  reale, e le soluzioni dell'equazione del moto sono di tipo oscillante.

La  $\text{Tr } M$  è una funzione continua dei parametri della macchina (lunghezze e gradienti dei singoli elementi) e quando  $|\text{Tr } M| = 2$  è sufficiente una piccola variazione dei parametri per passare dalla soluzione periodica oscillante a una soluzione aperiodica di tipo iperbolico, la cui ampiezza diverge. La situazione a cui corrisponde  $|\text{Tr } M| = 2$  è quindi una soluzione instabile (\*).

Qualunque multiplo di un sottoperiodo di macchina può essere scelto come periodo, si può calcolare la corrispondente matrice di trasferimento, il  $\mu$  ad essa relativo e ripetere le considerazioni precedenti sull'instabilità. Tuttavia, poichè una macchina non è mai perfetta, non c'è una rigorosa sottoperiodicità, e sono importanti ai fini dei calcoli di stabilità solo i periodi costituiti da un numero intero di giri di macchina.

$|\text{Tr } M| = 2$  per la matrice di un giro significa avere frequenza di betatrone intera, cioè tutte le traiettorie sono chiuse su un giro di macchina e sono instabili.  $|\text{Tr } M| = 2$  per la matrice di  $n$  giri significa orbite chiuse instabili su  $n$  giri e  $n\mu = \text{intero}$ . Seguendo questo ragionamento sembra che tutti i valori razionali delle frequenze di betatrone diano luogo a soluzioni instabili.

La presenza di termini non lineari nelle equazioni di betatrone, termini finora non considerati, migliora notevolmente la situazione: nella teoria non lineare si dimostra che le risonanze con andamento a funzione di Dirac nella frequenza si mutano in risonanze di larghezza finita e altezza finita, e che quest'ultima decresce rapidamente al crescere del numero di giri  $n$ . Le risonanze di ordine 4 possono essere quasi sempre trascurate. Qui calcoleremo la risonanza di ordine 3, seguendo la trattazione analitica di P.A. Sturrock<sup>(2)</sup>, e ne

(\*) - Si può dimostrare che la situazione  $\text{Tr } M = 2$ , sarebbe instabile anche in una macchina perfetta.



applicheremo le conclusioni all'anello di accumulazione ADONE da 1500 MeV.

## 2. LA RISONANZA DEL 3° ORDINE NEL CASO NON LINEARE.

Nell'articolo citato, Sturrock dimostra un teorema generale, il cui enunciato, nel caso specifico delle oscillazioni di betatrone in una macchina acceleratrice, può essere esposto nella forma seguente. Se tutte le traiettorie sono orbite chiuse su  $N$  giri, e il moto deriva da una lagrangiana  $\mathcal{L}$  periodica su un giro, l'effetto su  $N$  giri di una perturbazione  $\Delta\mathcal{L}$ , pure periodica su un giro, della lagrangiana, è di incrementare la fase  $\delta^{(x)}$  e l'ampiezza  $A^{(x)}$  della generica traiettoria di quantità  $\Delta\delta$  e  $\Delta A$  espresse dalle seguenti equazioni:

$$\Delta\delta = -\sigma^{-1} A^{-1} \frac{\partial \Delta U}{\partial A}$$

(35)

$$\Delta A = \sigma^{-1} A^{-1} \frac{\partial \Delta U}{\partial \delta}$$

avendo indicato con  $\sigma$  la quantità  $(B\rho/\beta(0))$  e con  $\Delta U$  un invariante del moto definito come l'integrale di linea della perturbazione  $\Delta\mathcal{L}$ , calcolato sulla traiettoria imperturbata chiusa su  $N$  giri:

$$\Delta U(A, \delta) = \oint_{\text{sulla traiettoria chiusa } (A, \delta)} \Delta\mathcal{L} ds$$

(36)

Per applicare queste considerazioni al caso di una macchina in cui  $3\nu = \text{intero} + (3\epsilon/2\pi)$  (con  $\epsilon \geq 0$ ) chiamiamo  $\mathcal{L}_0$  quella parte della lagrangiana lineare che dà luogo a  $3\nu = \text{intero}$ , e conglobiamo in  $\Delta\mathcal{L}$  la parte  $(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)$ .

Non è difficile dimostrare, calcolando  $\Delta\mathcal{L}$  in funzione delle derivate di ordine 2° e 3° del campo magnetico, che l'invariante  $\Delta U$  su tre giri è dato dalla seguente espressione:

$$\Delta U = -\frac{1}{2} \epsilon \sigma A^2 + \epsilon A^3 \sin(3\delta + \varphi) + F A^4$$

(37)

Il primo termine, come si può vedere dalle (35), dà lo scostamento  $\epsilon/2\pi$  della frequenza di betatrone dal valore  $1/3$  di intero.

I coefficienti  $E$  e  $F$  hanno le seguenti espressioni, che per semplicità non dimostriamo:

---

(x) - Per una soluzione  $x = a \sqrt{\beta(s)} \cos(\nu\phi(s) + \delta)$   
si ha  $A = a \sqrt{\beta(0)}$ .

$$(38) \quad E_r = \frac{1}{24} \left| \oint H_2 \left( \frac{\beta_r}{\beta_{or}} \right)^{3/2} e^{3i\nu_r \phi_r} ds \right|$$

$$F_r = -\frac{1}{64} \oint H_3 \frac{\beta_r^2}{\beta_{or}^2} ds$$

per le oscillazioni radiali con i parametri radiali

$$(38') \quad E_v = -\frac{1}{8} \left| \oint H_2 \mathcal{Z} \left( \frac{\beta_v}{\beta_{ov}} \right)^{3/2} e^{3i\nu_v \phi_v} ds \right|$$

$$F_v = -\frac{1}{64} \oint H_3 \frac{\beta_v^2}{\beta_{ov}^2} ds$$

per le oscillazioni verticali con i parametri verticali.

Avendo indicato con  $H_2$  la derivata seconda della componente verticale del campo magnetico, e con  $H_3$  la derivata terza entrambe calcolate sull'orbita di equilibrio, con  $\mathcal{Z}$  l'angolo di rotazione del piano mediano intorno all'asse ottico nel generico magnete o quadrupolo, con  $\beta_0$  il valore di  $\beta$  nel punto in cui fissiamo arbitrariamente  $S = 0$ : la scelta di questo punto non è critica. Siamo ora in grado di studiare il comportamento dell'ampiezza e della fase della generica traiettoria in prossimità della risonanza del 3° ordine.

Riscriviamo la (37) nella forma<sup>(\*)</sup>:

$$(37') \quad \sin(3\delta + \psi) = \frac{1}{2} \epsilon \sigma E^{-1} A^{-1} - F E^{-1} A + e E^{-1} A^{-3}$$

dove  $e$  è il valore dell'invariante, e supponiamo per il momento  $F = 0$ . Introduciamo per semplicità le variabili  $u$  e  $v$  così definite:

$$u = \frac{2EA}{\sigma|E|} \quad v = \frac{\epsilon}{|E|} \sin(3\delta + \psi)$$

La (37') diventa:

$$v = u^{-1} + c u^{-3}$$

e la famiglia di curve corrispondenti, di parametro  $C$ , è qualitativamente rappresentata nella figura 1.

Poichè  $v$  deve essere sempre compresa tra  $-1$  e  $+1$ , si vede che tutte le traiettorie il cui punto rappresentativo è contenuto nella zona tratteggiata sono stabili, le altre

(\*) - Per ulteriori chiarimenti v. l'appendice.

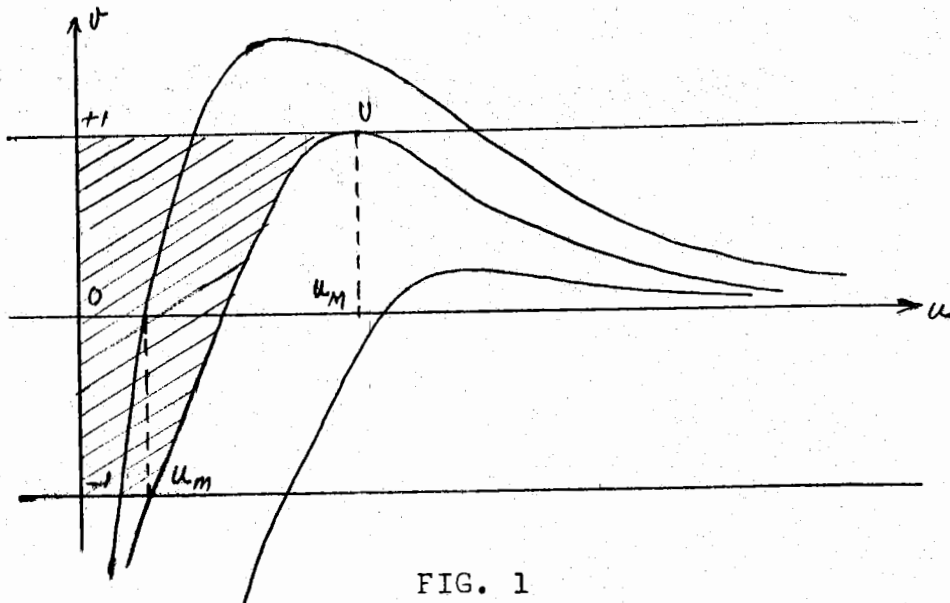


FIG. 1

traiettorie sono tutte instabili perchè i punti rappresentati si muovono su curve in cui  $u$  non è limitato, e quindi l'"ampiezza"  $A$  cresce indefinitamente.

Le traiettorie definitivamente stabili sono quelle di ampiezza  $< A_M$ , quelle definitivamente instabili hanno ampiezze  $> A_M$  (\*), quelle di ampiezza intermedia sono stabili o instabili a seconda della fase. Si trova facilmente

$$(39) \quad A_m = \frac{1}{6} \frac{\sigma |E|}{E} \quad A_M = \frac{1}{3} \frac{\sigma |E|}{E}$$

La conoscenza del valore di  $E$  permette di valutare se e quale parte del fascio diventa instabile alla frequenza  $\nu$ .

Supponiamo ora che  $F \neq 0$ .

Ponendo

$$(40) \quad u = A \frac{E^2}{|F|} \frac{1}{\sqrt{\sigma |F| |E|}} \quad \nu = \frac{\sin(3\delta + \psi)}{\frac{\sqrt{\sigma |F| |E|}}{2E^2}}$$

la (37') diventa

$$(41) \quad \nu = u^{-1} \pm u + cu^{-3}$$

con il segno - se  $F$  e  $E$  hanno lo stesso segno e con il segno + se  $F$  e  $E$  hanno segno opposto. I limiti di  $\nu$  sono ora

(\*) - Il punto  $U$  rappresenta 3 traiettorie instabili, con ampiezze tutte uguali, date da  $A_M$  e fasi definite da  $3\delta + \psi = \pi/2 + 2k\pi$ , cioè:  $\delta_1 = \frac{\pi}{6} - \frac{\psi}{6}$ ,  $\delta_2 = \delta_1 + \frac{2}{3}\pi$ ;  $\delta_3 = \delta_1 + \frac{4}{3}\pi$ .

$$\pm E \sqrt{(2/6)F|\epsilon|}$$

L'andamento delle curve (41) è rappresentato nella figura 2.

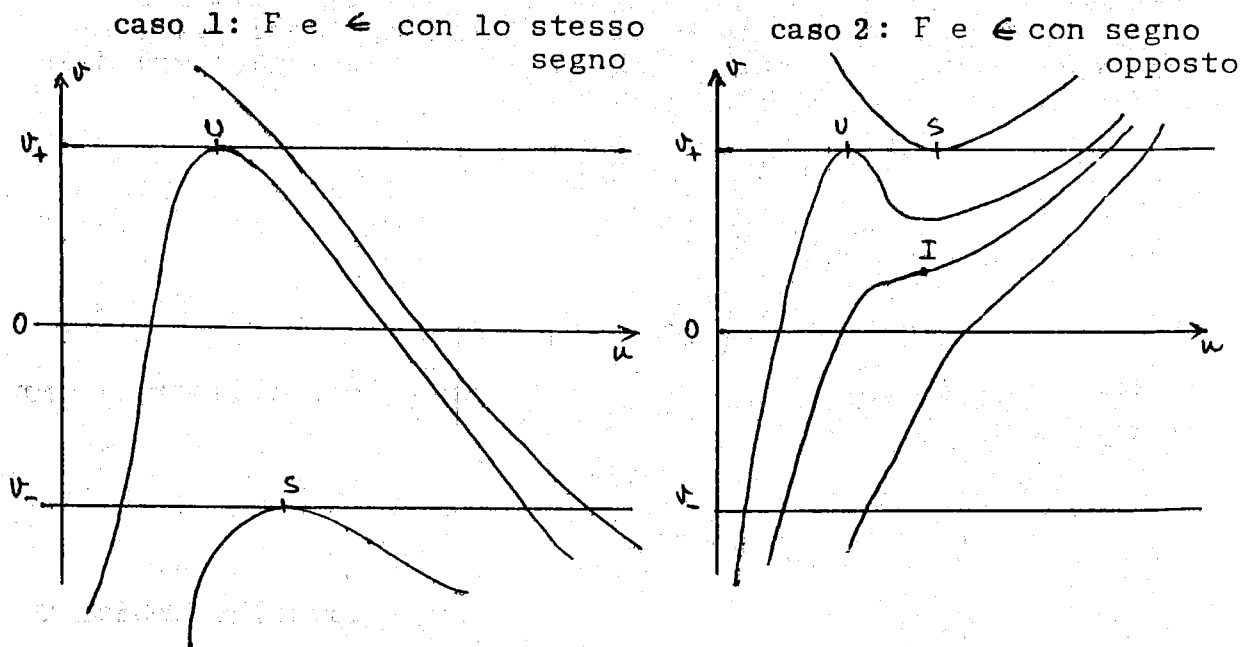


FIG. 2

Si vede che tutte le traiettorie hanno ampiezza limitata. Nel caso 1 esistono tre orbite chiuse stabili e tre orbite chiuse instabili, rappresentate dai punti S e U nel piano  $u, v$ . Nel secondo caso queste orbite esistono solo se il punto di flesso I cade nella striscia di  $v$  permessi, e questo accade solo per piccoli valori di  $\epsilon$ , cioè se:

$$(42) \quad -6\epsilon F < 9E^2/16$$

Pertanto se  $\epsilon$  e  $F$  hanno lo stesso segno, o se hanno segno opposto ma è soddisfatta la (42), le traiettorie, per quanto siano limitate, possono raggiungere ampiezze molto grandi. Possiamo rappresentare le (41) con curve nel piano  $A \cos \sigma$ ,  $A \sin \sigma$  (v. fig. 3).

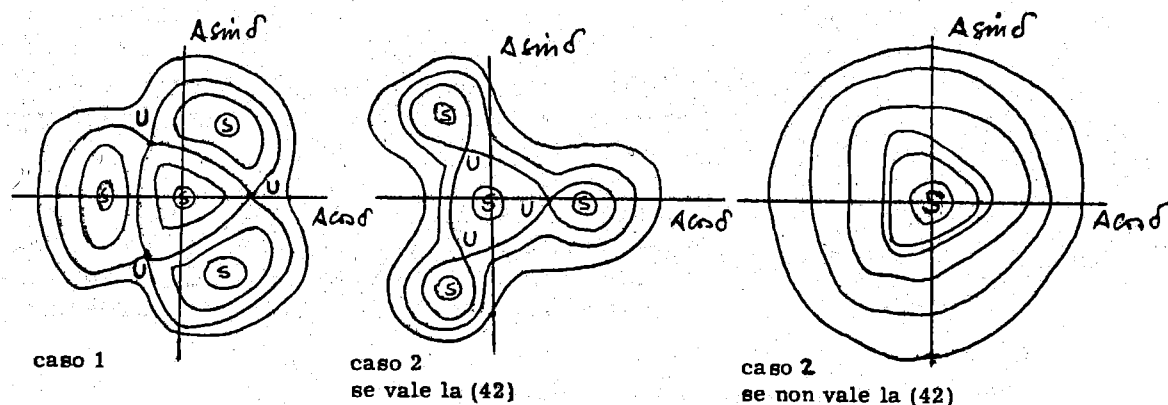


FIG. 3

Dopo un giro il punto rappresentativo ha percorso un angolo  $= (2\pi/3) + \epsilon$ , intorno all'origine, muovendosi su una curva della famiglia.

Le informazioni che più interessano sono le ampiezze delle orbite chiuse stabili e instabili nei vari casi. Per definizione, su un'orbita chiusa su  $N$  giri l'ampiezza e la fase dopo  $N$  giri non sono variate, pertanto le equazioni delle orbite chiuse si ottengono ponendo

$$\frac{\partial \Delta U}{\partial A} = 0 \quad \frac{\partial \Delta U}{\partial \delta} = 0$$

e quindi dalla (37):

$$(43) \quad 4 \frac{F}{6} A^2 \pm 3 \frac{E}{6} A - \epsilon = 0$$

il cui grafico nel piano  $A\epsilon$  è illustrato nella figura 4 per il caso 2).

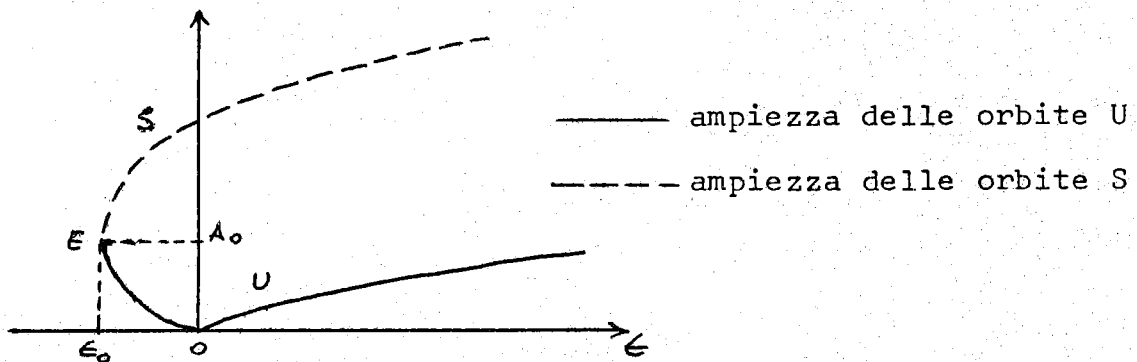


FIG. 4

Le coordinate del punto E sono

$$(44) \quad \epsilon_0 = -\frac{9}{16} \frac{E^2}{\delta/|F|} \quad A_0 = \frac{3}{8} \frac{E}{|F|}$$

Nel caso 1), cioè con  $\epsilon$  e  $F$  dello stesso segno, il grafico delle orbite chiuse si ottiene da quello in figura invertendo il verso dell'asse  $\epsilon$ .

In altre parole il punto  $(\epsilon_0/2\pi)$  si trova a una frequenza inferiore alla risonanza se  $F > 0$ , e a una frequenza superiore se  $F < 0$ .

In ogni caso, se la frequenza della macchina in condizioni statiche si trova a sinistra dell'origine della figura, la semilarghezza di stopband che interviene è  $(\epsilon_0/2\pi)$ , mentre in caso contrario la semilarghezza di stopband dipende dall'ampiezza  $A$  ed è data da

$$|\Delta v| = \frac{4/F/A^2 + 3AE}{2\pi\epsilon}$$

e per E trascurabile da

$$\frac{4/F/A^2}{2\pi\epsilon}$$

### 3. CALCOLO DEGLI INTEGRALI E e F.

Decomponiamo l'integrale E in una somma di integrali, ciascuno esteso a un magnete o a un quadrupolo, del tipo

$$E_k = \frac{1}{24} \int \frac{\beta_k}{\beta_0^{3/2}} H_k^{(2)} e^{3i\nu\phi_k} ds$$

Poichè supponiamo che in un elemento il campo non vari lungo l'ascissa curvilinea,  $H_k^{(2)}$  sarà costante. Inoltre  $\phi = \int (ds/v\beta)$ , e, dato che  $\beta$  varia poco, lo si può porre costante e uguale al valore medio  $\bar{\beta}$  nell'elemento considerato.

Pertanto:

$$E_k \sim \frac{1}{24} \frac{\beta_k^{-5/2}}{\beta_0^{3/2}} \frac{H_k^{(2)}}{3i} (e^{3i\nu\phi_{k+1}} - e^{3i\nu\phi_k})$$

Introduciamo le seguenti notazioni:

- j indice che caratterizza gli elementi di un periodo (j = 1, N)
- l indice che caratterizza la maglia (l = 1, P).

Tutti gli elementi con lo stesso indice j hanno lo stesso  $\bar{\beta}$  la stessa lunghezza e la stessa differenza di fase di betatrone, la fase di betatrone si incrementa di  $\mu$  passando dall'elemento j-esimo della maglia l all'elemento j-esimo della maglia (l+1).

Pertanto si può scrivere

$$E = \frac{1}{24} \frac{1}{\beta_0^{3/2}} \left| \sum_{j=1}^N \beta_j^{5/2} \frac{2}{3} \sin \left[ \frac{3\nu\Delta\phi_j}{2} \right] e^{\frac{3i\nu}{2}(\phi_j^0 + \phi_{j+1}^0)} \sum_{l=1}^P H_{lj}^{(2)} e^{3il\mu} \right|$$

Poichè

$$e^{i3P\mu} = e^{i3 \cdot 2\pi\nu} = e^{i2\pi N} = 1, \quad \sum_{l=1}^P e^{3il\mu} = \frac{e^{3i\mu}}{1 - e^{3i\mu}} (1 - e^{i3P\mu})$$

si trova  $E \equiv 0$  nel caso di  $H_{lj}^{(2)}$  costante su ciascuno degli N gruppi di elementi identici. L'integrale E quindi dipende solo dalle fluttuazioni del termine  $H^{(2)}$ .

Poniamo

$$H_{l_j}^{(2)} = H_{0_j}^{(2)} + \Delta H_{l_j}^{(2)}$$

con i termini  $\Delta H_{l_j}^{(2)}$  dovuti agli errori casuali.

Possiamo calcolare E nel modo seguente:

$$E = \frac{1}{24} \frac{1}{\beta_0^{3/2}} \left\{ \left[ \sum_{j=1}^N a_j \sum_{l=1}^P \Delta H_{l_j}^{(2)} \cos \left( 3l\mu + \frac{3}{2} \nu \phi_j^0 + \frac{3}{2} \nu \phi_{j+1}^0 \right) \right]^2 + \left[ \sum_{j=1}^N a_j \sum_{l=1}^P \Delta H_{l_j}^{(2)} \sin \left( 3l\mu + \frac{3}{2} \nu \phi_j^0 + \frac{3}{2} \nu \phi_{j+1}^0 \right) \right]^2 \right\}^{1/2}$$

con  $a_j = \beta_j^{5/2} \frac{2}{3} \sin \left( \frac{3}{2} \nu \Delta \phi_j \right)$ .

Eseguendo il valore medio di  $E^2$  su un insieme di macchine con errori  $\Delta H^{(2)}$  distribuiti in modo casuale si ottiene

$$\begin{aligned} \langle E^2 \rangle &= \left( \frac{1}{24 \beta_0^{3/2}} \right)^2 \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^P a_j^2 \langle (\Delta H^{(2)})^2 \rangle_j \left\{ \cos^2 \left( 3l\mu + \frac{3}{2} \nu \phi_j^0 + \frac{3}{2} \nu \phi_{j+1}^0 \right) + \sin^2 \left( 3l\mu + \frac{3}{2} \nu \phi_j^0 + \frac{3}{2} \nu \phi_{j+1}^0 \right) \right\} = \\ &= \frac{P}{(24 \beta_0^{3/2})^2} \frac{4}{9} \sum_{j=1}^N \langle (\Delta H^{(2)})^2 \rangle_j \beta_j^5 \sin^2 \left( \frac{3}{2} \nu \Delta \phi_j \right) \end{aligned}$$

Poichè di solito  $\nu \Delta \phi_j \sim \frac{L_j}{\beta_j} \ll 1$  ( $L_j$  = lunghezza dell'elemento j-esimo) si ha:

$$\langle E^2 \rangle^{1/2} \approx \frac{\sqrt{P}}{24 \beta_0^{3/2}} \left\{ \sum_{j=1}^N \langle (\Delta H^{(2)})^2 \rangle_j L_j^2 \beta_j^3 \right\}^{1/2}$$

Calcoliamo ora l'integrale F :

$$F = -\frac{1}{64} \oint ds H^{(3)} \frac{\beta^2}{\beta_0^2}$$

Con lo stesso procedimento usato per l'integrale E si ottiene:

$$F \sim -\frac{1}{64} \frac{1}{\beta_0^2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^P \beta_j^2 L_j H_{j,l}^{(3)}$$

avendo considerato solo i termini  $H_3$  sistematici.

Notiamo per inciso che, esprimendo  $\beta_0$  in metri,  $H^{(3)}$  in gauss/m<sup>3</sup> e  $H^{(2)}$  in gauss/m<sup>2</sup>, E risulta espresso in gauss/metro e F in gauss/m<sup>2</sup>.

Ricordiamo inoltre che l'ampiezza di oscillazione è definita come

$$x(s) = A \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}} \cos[\nu \phi(s) + \delta] .$$

#### 4. APPENDICE.

Vogliamo cercare di chiarire meglio il significato fisico delle curve nel piano  $u$  e  $v$  e anche che cosa si intende dicendo che  $\Delta U$  è un invariante.

Nel caso lineare e lontano da una risonanza,  $A$  e  $\delta$ , ampiezza e fase di una traiettoria, sono rigorosamente costanti, cioè non dipendono nè dall'ascissa curvilinea  $S$  nè dal numero di giri, e sono direttamente esprimibili mediante le condizioni iniziali  $x$  e  $x'$ , spostamento e angolo. Notiamo che  $A$  non contiene il termine  $\sqrt{\beta}(s)$  che viene considerato a parte.

Fissiamo ora in un punto della macchina i parametri  $A = A_0$  e  $\delta = \delta_0$  per una traiettoria. Nel caso non lineare, in prossimità della risonanza, dopo uno o più giri troveremo nello stesso punto di macchina per la traiettoria percorsa dalla stessa particella dei valori di  $A$  e  $\delta$  diversi da  $A_0$  e  $\delta_0$ . Dopo tre giri i nuovi valori differiscono da quelli iniziali per le quantità  $\Delta A$  e  $\Delta \delta$  definite dalle (35), variazioni che non sono indipendenti e arbitrarie, ma tali che il secondo membro della (37) calcolato con l'ampiezza e la fase finale assume lo stesso valore numerico che si ottiene calcolando con l'ampiezza e la fase iniziale; in questo senso  $\Delta U$  è invariante.

La (37) definisce allora il luogo, nel piano  $A, \delta$ , delle coppie di ampiezza e fase permesse da certe condizioni iniziali; il punto rappresentativo percorre (ma non con continuità) una determinata curva e i passi  $\Delta A$  e  $\Delta \delta$  compiuti ogni tre giri, sono definiti dalle (35).

Per semplicità sono state introdotte al posto di  $A$  e  $\delta$  le due variazioni  $u$  e  $v$ .  $u$  è proporzionale ad  $A$ ,  $v$  a  $\sin(3\delta + \varphi)$ , pertanto  $v$  non può assumere qualunque valore, ma può variare soltanto nell'intervallo  $-1$  a  $+1$ .



## PARTE IV - ALCUNI ESEMPI NUMERICI.

Applichiamo le formule dei precedenti capitoli al calcolo delle tolleranze per l'anello di accumulazione di Frascati da 1500 MeV, i cui parametri sono elencati nella seguente tabella:

Maglia (0/2) Q<sub>F</sub> 0' Q<sub>D</sub> 0" " M 0" Q<sub>D</sub> 0' Q<sub>F</sub> (0/2)  
 periodicità P = 12  
 raggio magneti g = 5 m  
 raggio medio R = 16,3 m

	lunghezze	$\bar{\beta}$ rad	$ \bar{\alpha} $ rad	$\bar{\beta}$ vert	$ \bar{\alpha} $ vert	$\psi$ (s)
magneti	2,6 (metri)	3,55	0	8,32	0	0,97
quadrupoli foch.	0,6	7,76	1,66	4,43	1,77	1,32
quadrupoli defoch.	0,6	4,98	1,43	7,15	1,63	1,82
sezione dritta 0	2,6	8,70		2,90		1,89
" " 0'	0,10					
" " 0"	0,35					
$\nu_R = 3,18$		$\mathcal{F}_{\text{rad}}^{\text{max}} = 1,75$		$\mathcal{F}_{\text{rad}}^{\text{min}} = 0,66$		
$\nu_V = 3,30$		$\mathcal{F}_{\text{vert}}^{\text{max}} = 1,71$		$\mathcal{F}_{\text{vert}}^{\text{min}} = 0,59$		
$\beta_{\text{rad}}^{\text{max}} = 8,90$				$\beta_{\text{rad}}^{\text{min}} = 3,35$		
$\beta_{\text{vert}}^{\text{max}} = 8,40$				$\beta_{\text{vert}}^{\text{min}} = 2,90$		

## 1. ERRORI CASUALI.

a) La (4) può essere riscritta nella forma:

$$\langle \delta v^2 \rangle = \left( \frac{v}{4\pi\rho} \right)^2 P \left\{ 2(\bar{\beta}_{QF}^4 + \bar{\beta}_{QD}^4) \left\langle \left( \frac{\Delta R}{R} \right)_Q^2 \right\rangle k_Q^2 + \bar{\beta}_M^4 \left\langle \left( \frac{\Delta h}{h} \right)^2 \right\rangle \frac{h^2}{S^4} \right\}$$

avendo indicato con l'indice M i magneti, con gli indici Q<sub>F</sub> e Q<sub>D</sub> rispettivamente i quadrupoli focheggianti e defocheggianti, con  $\bar{\beta}$  il valore medio di  $\beta$  nell'elemento generico, che può essere approssimato con il valore di  $\beta$  nel punto centrale dell'elemento stesso. Sono stati introdotti gli errori percentuali del gradiente e dell'indice di campo; inoltre, poiché i quadrupoli focheggianti e defocheggianti sono identici dal punto di vista meccanico ed elettrico, differendo solo per il segno del gradiente, abbiamo indicato con  $|k_Q|$  il comune valore del modulo del gradiente e con  $\left\langle \left( \frac{\Delta k}{k} \right)_Q^2 \right\rangle^{\frac{1}{2}}$  l'errore percentuale quadratico medio uguale per tutti i quadrupoli.

Introducendo i valori numerici dei parametri si ottiene:

$$\langle \delta v^2 \rangle = 240 \left\langle \left( \frac{\Delta k}{k} \right)^2 \right\rangle_Q + 5,25 \cdot 10^{-3} \left\langle \left( \frac{\Delta n}{n} \right)^2 \right\rangle$$

in particolare

$$\langle \delta v^2 \rangle^{1/2} = 1$$

per

$$\left\langle \left( \frac{\Delta k}{k} \right)^2 \right\rangle^{1/2} = 4,56 \cdot 10^{-2}$$

$$\left\langle \left( \frac{\Delta n}{n} \right)^2 \right\rangle^{1/2} = 9,75$$

In modo analogo, dalla (5) si ottiene un'indeterminazione sulla frequenza di valore quadratico medio  $\langle \Delta v^2 \rangle^2 = 1$  in corrispondenza a

$$\left\langle \left( \frac{\Delta k}{k} \right)^2 \right\rangle^{1/2} = 0,395$$

$$\left\langle \left( \frac{\Delta n}{n} \right)^2 \right\rangle^{1/2} = 36,3$$

b) Dalla (17) si ottiene uno spostamento  $y$  dell'orbita chiusa, radiale o verticale, uguale a 1 (in unità arbitrarie), in corrispondenza ai seguenti valori degli errori quadratici medi di allineamento:

	Radiale	Verticale
quadrupoli	$2,62 \cdot 10^{-2}$ (nelle unità di $y$ )	$2,85 \cdot 10^{-2}$
magneti	0,67	0,447
doppietti	0,17	0,16

c) Dalla (31), eseguendo il calcolo nel punto in cui  $\beta$  radiale è massimo, si ottiene un fattore di amplificazione = 8 tra l'errore q.m. di lunghezza e allineamento azimutale dei magneti e il valore quadratico medio dello spostamento massimo dell'orbita chiusa.

## 2. ERRORI SISTEMATICI.

a) Con i dati numerici  $n = 0,5$ ,  $\rho = 5$  m, e ponendo  $\overline{\psi} \sim 1$  cm si ottiene per la variazione delle costanti di damping

$$\left| \frac{\Delta z}{z} \right| = 0.2 \left| \frac{\Delta n}{n} \right|$$

Un errore sistematico ( $\Delta n/n$ ) del 5% produce quindi variazioni dell'1% sulle costanti di smorzamento di sincrotrone e di betatrone radiale.

b) Gli elementi delle matrici parziali che intervengono nel calcolo dei disallineamenti dei quadrupoli assumono i seguenti valori:

	radiale	verticale
$a_1$	0,4	1,09
$a_2$	1	0,38
$b_1$	- 2,44	1,23
$b_2$	- 0,93	1,08
$c_1$	1,35	- 1,13
$c_2$	1,15	- 2,15

pertanto si ottiene per i disallineamenti verticali:

$$Z_o = - 2,5 \Delta_F + 4,07 \Delta_D$$

$$\bar{Z}_o = - 3,8 \Delta_F + 5,5 \Delta_D$$

e per i disallineamenti radiali:

$$X_o = 5,62 \Delta_F - 4,18 \Delta_D$$

$$\bar{X}_o = 4,68 \Delta_F - 3,03 \Delta_D$$

da cui la semiampiezza dell'orbita chiusa radiale risulta:

$$\left| \frac{X_o - \bar{X}_o}{2} \right| = \left| 0.58 \Delta_F - 0.47 \Delta_D \right|$$

c) Per gli errori sulle lunghezze azimutali dei magneti si ottiene un fattore di amplificazione:

$$\left| \frac{X - \bar{X}}{\Delta \ell} \right| = 0.14$$

## 3. EFFETTI NON LINEARI.

In base alle recenti misure sul modello dei quadrupoli, si può procedere al calcolo della stopband intorno alla frequenza 3,33 per la macchina da 1500 MeV, 12 periodi, maglia

$$0/2 \quad Q_F \quad Q_D \quad B \quad Q_D \quad Q_F \quad 0/2$$

tenendo conto per ora solo del contributo alla stopband dovuto ai quadrupoli.

Dalle misure del gradiente  $(\partial B_z / \partial x)$  nella sezione centrale del quadrupolo in funzione della distanza radiale dall'asse si nota la presenza di un termine  $H_3$  con lo stesso segno di  $H_1$ , e del termine  $H_5$  di segno opposto ad  $H_1$ . Lo andamento sperimentale è simmetrico rispetto all'asse del quadrupolo, quindi se esiste un termine  $H_2$ , esso è estremamente piccolo.

Segue da ciò e dall'esame della definizione di  $F$  che i contributi all'integrale  $F_{rad}$  dovuti ai quadrupoli focogianti sono positivi, quelli dovuti ai quadrupoli defocogianti negativi; e poichè  $\beta_{rad}$  è maggiore nei quadrupoli focogianti,  $F_{rad}$  risulta negativo.

Poichè la frequenza radiale sarà dell'ordine di 3,15  $\rightarrow$  3,25, siamo nel caso (1), cioè  $\epsilon$  e  $F$  dello stesso segno, e ci dobbiamo aspettare una semilarghezza di stopband piuttosto ampia. Trascurando il termine  $E(\propto H_2)$ , valutiamo la stopband come:

$$\Delta \nu = \frac{4FA^2}{2\pi\sigma}$$

considerando un'ampiezza massima  $A$  di oscillazione radiale di 10 cm nel punto di  $\beta$  massimo. Dai parametri della macchina si ottiene:

$$F_{rad} = -11,1 \frac{|H_3|}{\beta_0^2 rad} \text{ gauss m}^{-1}$$

$$\sigma = \frac{B\theta}{\beta_0} = \frac{5 \cdot 10^4}{\beta_0} \text{ gauss}$$

$$|\Delta \nu| = \frac{4 \cdot 11,1 |H_3| 10^{-2}}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^4 \beta_0^2 max} \beta_0^2 max = |H_3| \frac{4 \cdot 11,1 \cdot 10^{-2} \nu}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^4 R F_{max}} =$$

$$= |H_3| \frac{4 \cdot 11,1 \cdot 10^{-2} \cdot 3,2}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 16,3 \cdot 1,75} = 1,59 \cdot 10^{-7} |H_3|$$

Per avere  $|\Delta \nu| \leq 0,05$ ,  $|H_3|$  non deve superare  $3,15 \cdot 10^5 \text{ gs/m}^3$

e poichè  $|H_1| = 10^4 \cdot 4,15 \text{ gs/m}$ , il rapporto  $|(H_3/H_1)|$  non deve superare  $7,6 \text{ m}^{-2}$ . Il rapporto sperimentale può essere stimato  $\leq 8, \text{ m}^{-2}$ , pertanto è soddisfacente.

In verticale,  $\beta_F < \beta_D$ , pertanto  $F$  ha il segno di  $H_3$  negli elementi focheggianti radialmente, cioè è  $> 0$ . La semilarghezza di stopband verticale nella zona al di sotto della risonanza è data da

$$\Delta \nu = - \frac{9 E^2}{2 \pi 16 \sigma F}$$

Il termine  $E$  dipende dalle fluttuazioni di  $H_2$  da elemento a elemento e prevediamo che queste fluttuazioni abbiano un valore quadratico medio dell'ordine di  $|H_3| \cdot \langle \Delta x^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ , essendo  $\langle \Delta x^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$  il disallineamento quadratico medio radiale, che è l'unica causa prevedibile che dia  $\langle H_2^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \neq 0$ .

E contiene inoltre un termine  $\langle \psi^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ , valore quadratico medio dell'angolo di rotazione intorno all'asse attico dei quadrupoli.

Possiamo quindi ritenere che  $\Delta \nu_{\text{vert}}$  sia assolutamente trascurabile.

#### BIBLIOGRAFIA.

- (1) - E.D. Courant and H.S. Snyder, "Theory of the alternating gradient synchrotron, Ann. Phys. 3, 1 (1958).
- (2) - P.A. Sturrock, Ann. Phys. 3, 113 (1958).
- (3) - C. Pellegrini, Suppl. Nuovo Cimento 22, 603 (1961).